















Festigkeitslehre.

Kurz gefasstes Lehrbuch

nebst

Sammlung technischer Aufgaben

von

Ernst A. Brauer,

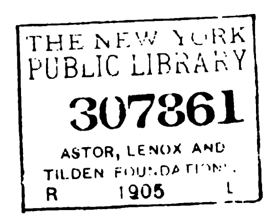
Hofrat und Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe.

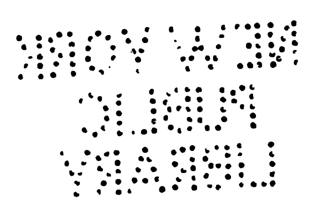
Mit 292 Abbildungen im Text

Leipzig

Verlag von S. Hirzel

1905


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
307861
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1905 L



Vorwort.

Das vorliegende Buch zerfällt in zwei Teile, einen ersten, welcher den theoretischen Grundlagen der Festigkeitslehre gewidmet ist, und einen zweiten, der sich mit Anwendungen im Maschinen- und Bauwesen beschäftigt. Während der theoretische Teil das Ziel verfolgt, die Regeln und Gesetze der Festigkeitslehre in zusammenhängender Darstellung zu begründen, soll der zweite Teil, der die Form einer Aufgabensammlung erhalten hat, einen Überblick über das ganze Gebiet der technischen Aufgaben gewähren, zu deren Lösung man der Festigkeitslehre bedarf.

Mit der Zweiteilung soll keineswegs dem Studierenden, der sich erstmals mit Festigkeitslehre beschäftigt, empfohlen werden, den theoretischen Teil vollständig durchzuarbeiten, ehe er sich mit den Aufgaben befasst, wird doch auch der erfahrene Lehrer nicht umhin können, Anwendungsbeispiele schon in den Vortrag einzuflechten, teils um die Formeln zu beleben, teils um zu zeigen, wie sich mit dem Wissen allmählich auch der Umfang des Könnens erweitert. Die gewählte Trennung hat jedoch den Vorteil, dass sie den theoretischen Teil von der Ausdehnung in die Breite befreit und es der eigenen Wahl des Lesers überlässt, je nach Bedarf auf den einzelnen Stufen zu verweilen und unter den betreffenden Aufgaben Umschau zu halten, um festen Fuss zu fassen, ehe er sich der folgenden Stufe zuwendet.

Für die weitere Gruppierung des Stoffes hat die Unterscheidung zwischen den Zuständen einachsiger, zweiachsiger und dreiachsiger Spannung des Körperelements den Hauptgesichtspunkt abgegeben. Sie ist nicht nur für die grundlegenden Betrachtungen des Abschnitts II und für die Abschnitte IV bis VIII durchgeführt worden, sondern sie hat auch einigen Einfluss auf die Gruppierung der Aufgaben gehabt. Diese Einteilung entspricht im allgemeinen dem Grundsatz zunehmender Schwierigkeit, und ich hoffe, dass der hiermit gewonnene Nutzen grösser ist als der Nachteil, der vielleicht in einigen Abweichungen vom Herkömmlichen gefunden werden könnte. Demselben Grundsatz entspricht die gewählte Reihenfolge der ersten beiden Abschnitte, enthält doch der Abschnitt I nur

geometrische Betrachtungen, während Abschnitt II bereits der Mechanik angehört.

Die fundamentalen Abschnitte I bis III, wie es mehrfach geschehen ist, aus pädagogischen Rücksichten ans Ende des Lehrganges zu verschieben und damit gewissermassen das Fundament erst zu bauen, nachdem das Haus fertig ist, scheint mir für ein Buch um so weniger angebracht, als es den Lehrer nicht hindert, bei ungenügender Vorbildung der Hörer im Vortrag die etwa nötigen Änderungen in der Reihenfolge nach eigener Einsicht vorzunehmen.

Die Grenzen der Festigkeitslehre sind von verschiedenen Schriftstellern sehr verschieden gezogen worden. Unsicherheit besteht namentlich gegenüber der Mathematik, der Physik, der allgemeinen Mechanik, der Technologie der Baumaterialien, der Lehre von den Maschinenelementen, dem Brückenbau und dem Hochbau.

Wenn ich bestrebt war, diesen Nachbargebieten gegenüber die Grenzen möglichst eng zu ziehen, so geschah es nicht nur, um Übergriffe zu vermeiden und den Umfang des Buches zu beschränken, sondern besonders auch, um die der Festigkeitslehre eigentümlichen Gedankengänge möglichst frei von Nebendingen zur Darstellung zu bringen. Das gilt namentlich für den ersten Teil, in welchem man vielleicht manches vermissen wird, was in den bekannten Werken gleicher Richtung ausführlich behandelt wird. Ich erwähne z. B. die Lehre von den geometrischen Integralen, insbesondere den Momenten ersten und zweiten Grades, die ich als bekannt voraussetzen darf, und zu deren Wiederholung und Einübung die erste Aufgabengruppe genügen wird. Auch das umfangreiche Gebiet der Qualitätsprüfung der Baumaterialien ist fast vollständig übergangen, da es, wie mir scheint, mehr in die Technologie gehört als in die Festigkeitslehre.

Der Inhalt des ersten Teiles ist, was den Stoff betrifft, seit langer Zeit bekannt und vielfach in vorzüglichen Werken dargestellt. Kann daher auch materiell kaum etwas Neues geboten werden, so glaube ich doch auf einige Fortschritte in der Darstellung hinweisen zu dürfen, z. B. auf den II. Abschnitt, ferner auf die §§ 59 bis 62, endlich auf den V. und den IX. Abschnitt.

Die Übungsbeispiele sind zum Teil ebenfalls allgemein bekannt un in vielen Lehrbüchern zu finden. Einige beruhen im Grundgedanken a Prüfungsaufgaben Grashofs, welche ich in den Akten und in Programm der Technischen Hochschule zu Karlsruhe gefunden habe. Die meist habe ich schon lange im eigenen Unterricht und den damit verbunden Übungen benutzt und erprobt.

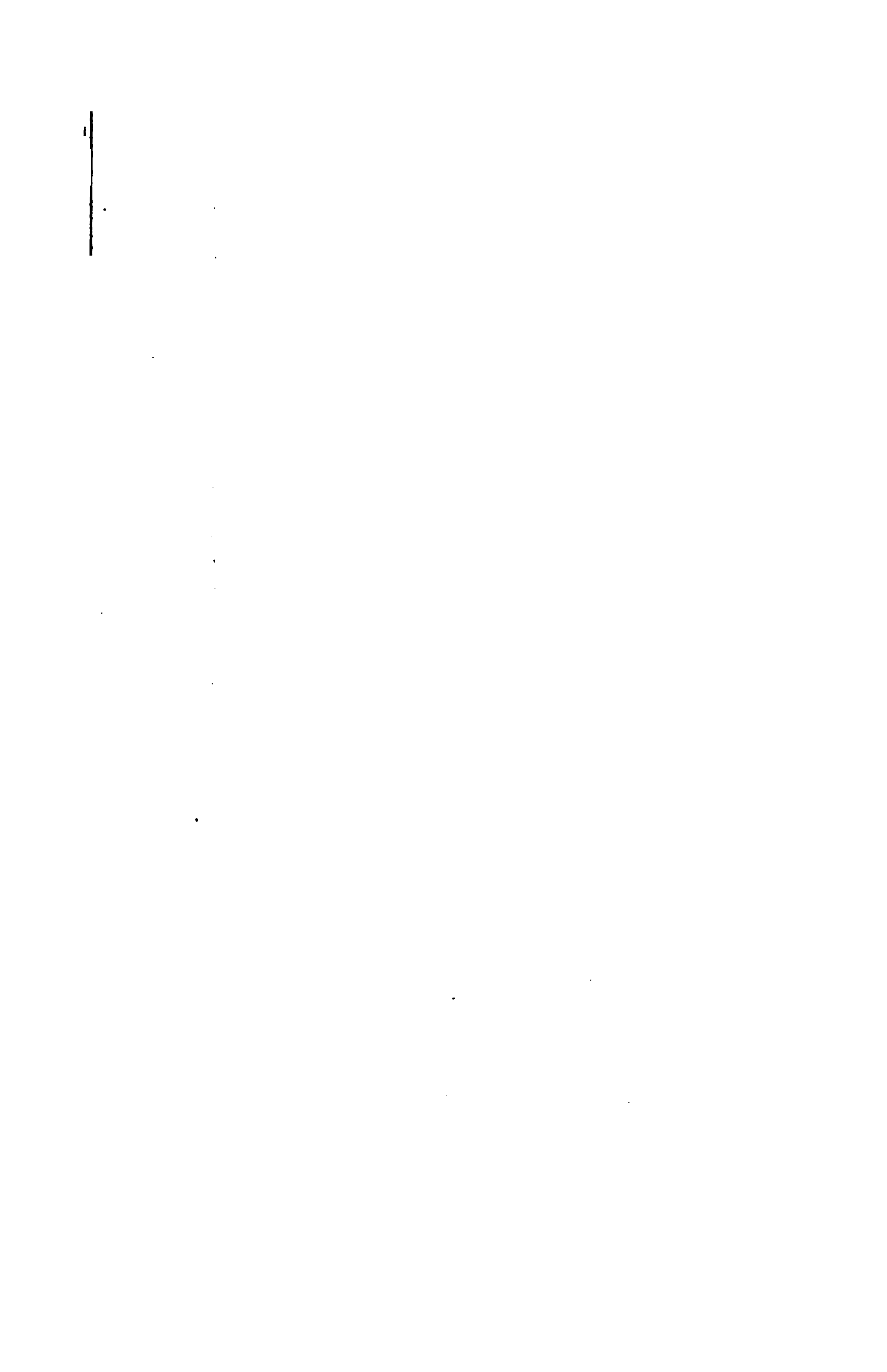
Gern und dankbar gedenke ich dabei der Mitwirkung der jungen Kollegen, die seit 1892 als Assistenten in diesen Übungen tätig und bei den Vorbereitungen beteiligt waren. Es sind dies die Herren Chr. Eberle, G. Leber, A. Ziegler, H. Stadtmüller, H. Röttgen, O. Rüdt, F. Müller und M. Hollenweger. Den drei letztgenannten danke ich auch für ihre Hilfe bei der Anfertigung der Zeichnungen und der Durchsicht der Korrekturbogen.

Von den Figuren des zweiten Teils hätten manche durch einige Textworte ersetzt werden können. Sie erleichtern jedoch das schnelle Auffinden der Aufgaben, was hier umso wichtiger ist, als es nicht anging, die Aufgaben einzeln mit treffenden Namen zu kennzeichnen und in das Inhaltsverzeichnis aufzunehmen. In Anbetracht dieses untergeordneten Zweckes konnte der Massstab für die meisten Figuren im zweiten Teil wesentlich kleiner gewählt werden als im ersten.

Das Buch wendet sich in erster Linie an meine Zuhörer. Möchte es dazu beitragen, dass sie die Hochschule mit einem Schatz geordneter Kenntnisse aus dem Gebiete der Festigkeitslehre verlassen, möchte es zur weiteren Vertiefung in dieser für den Ingenieur so überaus wichtigen Wissenschaft und ihrer umfangreichen Litteratur anregen, und möchte es einen Standpunkt erreichen helfen, wo die Formel, der Autorität entkleidet, die sie sich auf niederer Stufe so gern anmasst, nur noch als Werkzeug leicht und willig dient.

Karlsruhe, Februar 1905.

Ernst A. Brauer.



Inhaltsverzeichnis.

Theoretische Grundlagen der Festigkeitslehre.

Einleitung.

I. Abschnitt.

Der geometrische Zustand eines deformierten Körperelements.

II. Abschnitt.

Der mechanische Zustand eines deformierten Körperelements.

III. Abschnitt.

Der Zusammenhang zwischen dem geometrischen und dem mechanischen Zustand eines elastischen Elements.

IV. Abschnitt.

Die Festigkeit gerader stabförmiger Körper bei einachsigem Spannungszustand.

V. Abschnitt.

Die Biegungsfestigkeit krummer Stäbe.

VI. Abschnitt.

Mehrachsiger Spannungszustand stabförmiger Körper.

VII. Abschnitt.

Die Festigkeit wandförmiger Körper.

VIII. Abschnitt.

Körper von gedrungener Form.

IX. Abschnitt.

Der Modellversuch und seine Verwertung.

X. Abschnitt.

Beurteilung der Festigkeitsgefahr.

Anwendungen der Festigkeitslehre.

Berichtigungen.

Seite	Stelle	Fehler	Verbesserung
[illegible]	Z. [illegible] v. u.	Hauptsehnenspannungen	Sehnenspannungen
[illegible]	„ [illegible] v. o.	§ 45	gehört Z. 14 v. o.
[illegible]	„ [illegible] v. u.	$\frac{S}{[illegible]}$	$\frac{S}{F}$
[illegible]	„ [illegible] v. u.	§ [illegible]	§ 125
[illegible]	„ 2 v. o.	wandf[illegible]miger	wandförmiger
[illegible]	„ 14 v. o.	§ [illegible]4	gehört Z. 12 v. o.
[illegible]	„ 6 v. u.	einer	seiner

THEORETISCHE

GRUNDLAGEN

DER

FESTIGKEITSLEHRE.



Einleitung.

Festigkeit und Nachgiebigkeit.

§ 1. Nach der üblichen Unterscheidung zwischen festen, flüssigen und gasartigen Körpern kann es scheinen, als schlössen sich die Eigenschaftsbegriffe fest, flüssig, gasartig gegenseitig aus. Bekanntlich besteht jedoch eine scharfe Grenze weder zwischen dem festen und flüssigen, noch zwischen dem flüssigen und gasartigen Aggregatzustand, und es gibt keinen Körper, der nicht die den letzten beiden Zuständen eigentümliche Nachgiebigkeit wenigstens in geringem Masse besitzt. Unter Festigkeit ist daher nicht vollkommene Starrheit zu verstehen, sondern nur ein hoher Grad von Widerstandsfähigkeit gegen umgestaltende Einflüsse.

Formbeständigkeit und Nachgiebigkeit eines festen Körpers hängen nach Art und Grösse teils von ihm selbst, teils von äusseren Einflüssen ab und unterliegen gewissen allgemeinen Naturgesetzen. Die Erforschung dieser Gesetze bildet die Grundlage, ihre Darstellung den Inhalt der Festigkeitslehre, einer Wissenschaft, welche es mit der Substanz, Form und Grösse der Körper, mit den sie beeinflussenden Kräften und bisweilen mit Wirkungen der Wärme zu tun hat.

Es gibt Formänderungen, welche mit ihrer Ursache wieder verschwinden und solche, bei denen dies nicht der Fall ist. Man bezeichnet die ersteren als elastische oder stabile, die letzteren als plastische oder duktile. Kleine Formänderungen, deren Betrag unter einer gewissen Grenze, der Elastizitätsgrenze, bleibt, sind bei den meisten Stoffen elastisch. Mit diesen und mit den Bedingungen ihrer Stabilität hat es die Festigkeitslehre vorzugsweise zu tun; deshalb nennt man diese Wissenschaft mitunter Elastizitätslehre.

Aufgaben der Festigkeitslehre.

§ 2. Die Festigkeitslehre ist eine Erfahrungswissenschaft. Fussend auf unabsichtlichen — zufälligen — oder absichtlichen — experimentellen —

Erfahrungen lehrt sie die Vorausbestimmung von künftigen Vorgängen verwandter Art in der Absicht, zu zeigen, wie man 1) zweckmässige Formänderungen hervorrufen, 2) unzweckmässige vermeiden oder einschränken, 3) unzulässige verhüten kann.

Die Festigkeitslehre ist nicht abgeschlossen, weder in ihren erfahrungsmässigen Grundlagen noch in dem zum grossen Teil mathematischen Gefüge ihrer Folgerungen. Man erkennt in der historischen Entwickelung dieser Wissenschaft das Bestreben, den ganzen sich stets erweiternden Vorrat von Erfahrungen in solcher Weise zu verknüpfen, dass es möglich wird, sie aus einer kleinen Zahl einwandfreier Tatsachen logisch abzuleiten. Trotz bewunderungswürdiger Leistungen der Mathematiker und Physiker[1]) des vorigen Jahrhunderts, ist man von diesem Ziele noch weit entfernt, denn, verglichen mit der unendlichen Fülle von Aufgaben, deren Lösung von praktischem Interesse wäre, ist die Zahl derjenigen, die sich schon jetzt auf diesem Wege mit einiger Strenge lösen lassen, noch recht klein.

Am leichtesten und sichersten kann man zur Zeit die Festigkeit solcher Körperformen berechnen, bei denen die räumliche Ausdehnung nach einer oder nach zwei Richtungen überwiegt. Man kann Körper der ersten Art, bei denen Dicke und Breite der Länge gegenüber zurücktritt, als stabförmige, Körper der zweiten Art, welche besonders als Gefässe oder Gefässteile vorkommen, als wandförmige bezeichnen. Körper von gedrungener Form, die sich nicht in eine dieser beiden Klassen einfügen lassen, z. B. kurze Stäbe oder besonders dicke Gefässwände können in gewissen Fällen, je nach ihrer besonderen Gestalt, näherungsweise als stabförmige oder als wandförmige berechnet werden.

Für die Technik ist die Schwierigkeit, welche bei der Behandlung gedrungener Körper auftritt, weniger störend, weil für diese seltener das Bedürfnis genauer Festigkeitsberechnung vorliegt. Meist sind es Körper von nicht sehr grossen Abmessungen, bei denen die Erzielung des kleinstmöglichen Gewichts hinter anderen Bedingungen zurücktritt.

Der Festigkeitszustand.

§ 3. Denkt man sich einen festen Körper von einem dreifachen Netz paralleler Ebenen durchzogen, die einander rechtwinklig schneiden, so zerfällt er in eine Anzahl kleiner Teile, und zwar in innere Teile von der Form eines Parallelepipeds und Oberflächenteile, welche Abschnitte eines solchen sind. Je kleiner diese Teile sind, um so einfacher und gleichartiger werden die

1) Vergl. Todhunter and Pearson, A history of the Elasticity and of the strength of materials 1886—1893.

ormänderungen sein, die sie bei Änderung der Gesamtform erleiden, um so ·össer wird daher die Wahrscheinlichkeit, allgemeine Gesetze zu finden, elche von der besonderen Körperform unabhängig sind.

Von dieser Absicht geleitet stützt sich die allgemeine mathematische heorie der Festigkeit auf die Betrachtung eines unendlich kleinen Körperements der beschriebenen Art. Dabei wird stetige Raumerfüllung an-ᵹnommen, also von Hypothesen über die Molekularstruktur des Stoffes ɔgesehen, nachdem ältere Versuche, die Festigkeit und Elastizität als Folge ›n Molekularkräften mathematisch zu erklären, ohne wesentlichen Erfolg ›blieben sind.

Der Festigkeitszustand eines Körpers kann nur dann als bekannt gelten, enn er in allen Punkten, d. h. in allen unendlich kleinen Körperteilen ange-›ben werden kann. Denn, wenn nur in einem Punkte die Elastizitätsgrenze ɔerschritten wäre, so würde derselbe zum Ausgangspunkt einer Zerstörung ᵹr ganzen Körperform werden können. Hierin liegt ein weiterer Anlass ır Untersuchung der Festigkeit kleinster Teile.

Die Betrachtungen über die Festigkeit eines Körperelements sind teils ᵹometrischer Natur, teils gehören sie in das Gebiet der Mechanik; man ann sie nach folgenden drei Gruppen ordnen:

1. Die elastischen Formänderungen an sich, ohne Rücksicht auf echanische Ursachen und Wirkungen.

2. Die Bedingungen für das Gleichgewicht oder den Bewegungszustand nes Körperelements.

3. Die gegenseitige Abhängigkeit zwischen Formänderung und Kräfte-irkung.

In der Aufsuchung und Anwendung der zuletzt genannten Beziehungen ᵹgt das Wesen der Festigkeitslehre. Die drei Gruppen bilden den Inhalt ›r folgenden Abschnitte I bis III.

———————

I. Abschnitt.

Der geometrische Zustand eines deformierten Körperelements.

Die geometrische Verwandtschaft bei der Deformation.

§ 4. Wenn ein beliebig gestalteter elastischer Körper aus der Form I in die Form II übergeht, so besteht zwischen den geometrischen Gebilden, in denen sich die Form vor und nach der Änderung darstellt, eine **geometrische Verwandtschaft.**

Ist P ein Punkt im Innern oder an der Oberfläche des Körpers, welcher vor der Änderung mit dem Punkte P_1 des Gebildes I zusammenfällt, so findet sich seine Materie wieder in einem Punkte P_2 des Gebildes II. Jedem Punkte des Gebildes I entspricht sonach ein gewisser Punkt des Gebildes II.

Die Strecke $P_1 P_2$ stellt durch Grösse und Richtung die geometrische Wirkung der Deformation auf den Punkt P, seinen **Deformationsweg**, dar.

Wäre eine Regel bekannt, nach welcher der Deformationsweg für jeden Punkt des Körpers berechnet werden könnte, d. h. das **Deformationsgesetz**, so könnte auch für jede beliebige Gruppe von Punkten P_1 die zugehörige Gruppe der Punkte P_2 gefunden werden.

Wäre z. B. Q ein zweiter materieller Punkt desselben Körpers, so geht die Länge $P_1 Q_1$ über in $P_2 Q_2$, demnach ist $P_2 Q_2 - P_1 Q_1$ die Verlängerung dieser Strecke.

Durch einen dritten Punkt O wäre das Dreieck OPQ in den Gebilden I und II gegeben. Man könnte also durch Vergleich der Dreiecke $O_1 P_1 Q_1$ und $O_2 P_2 Q_2$ nicht nur die Verlängerung der Seiten, sondern auch die Änderung der Winkel finden.

Die Gesetze, nach denen sich elastische Körper deformieren, sind oft sehr verwickelt. Zur Einführung in das Verständnis derselben möge die Betrachtung einiger Beispiele dienen, bei denen ein einfaches Deformationsgesetz als gegeben betrachtet wird.

Das Gesetz der Ähnlichkeit als Deformationsgesetz.

§ 5. Sind die Körper I und II geometrisch ähnlich, so hat für je zwei beliebig ausgewählte Punkte P und Q das Verhältnis $P_2Q_2 : P_1Q_1$ überall den gleichen Wert, und alle Dreiecke $O_1P_1Q_1$ und $O_2P_2Q_2$ sind ähnlich, haben also gleiche Winkel.

Bringt man zwei solche Dreiecke derart zur Deckung, dass O_1 und O_2 zusammenfallen, während OP_1 mit OP_2, OQ_1 mit OQ_2 gleiche Richtung hat, so liegen die Körper perspektivisch inbezug auf O, und alle Deformationswege haben die Richtung von Strahlen mit dem Ursprung O. Ist etwa Körper I eine Kugel mit dem Mittelpunkte O, so ist II wieder eine Kugel.

Sind s_1 und s_2 homologe Strecken, z. B. Radien, so pflegt man das Verhältnis

$$\frac{s_2 - s_1}{s_1} = \varepsilon \tag{1}$$

zu setzen und als spezifische Dehnung, d. h. Zunahme der Längeneinheit oder kurz als Dehnung, zu bezeichnen, und man hat dann das einfache Resultat: Bei geometrisch ähnlicher Deformation ist für alle Strecken die Dehnung konstant.

In dieser Weise deformieren sich bekanntlich feste Körper, wenn sie im unbelasteten Zustand einer Temperaturänderung ausgesetzt werden. Ist dann α der Ausdehnungskoeffizient, $t_2 - t_1$ die Temperaturzunahme, so ist

$$\varepsilon = \alpha\,(t_2 - t_1). \tag{2}$$

Das Gesetz der Affinität als Deformationsgesetz.

§ 6. Sind x_1, y_1, z_1, beziehungsweise x_2, y_2, z_2 die rechtwinkligen Koordinaten homologer Punkte zweier geometrischer Körper, so nennt man dieselben affin, wenn die Vergrösserungsverhältnisse

$$\frac{x_2}{x_1}, \qquad \frac{y_2}{y_1}, \qquad \frac{z_2}{z_1}$$

für alle Punkte gleiche, wenn schon unter sich verschiedene Werte besitzen, oder wenn, mit den Bezeichnungen

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} = \varepsilon_x, \quad \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \varepsilon_y, \quad \frac{z_2 - z_1}{z_1} = \varepsilon_z,$$

die Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z für den ganzen Körper konstante Zahlen sind. Während im allgemeinen die drei Dehnungen positiv oder negativ und von einander verschieden sind, können dieselben bis auf eine Null werden oder

paarweise einander gleich sein. Im letzteren Falle sind die in der Ebene gleicher Dehnungen liegenden homologen Figuren ähnlich. Sind alle drei Dehnungen einander gleich, so geht die Affinität über in vollständige Ähnlichkeit.

Bekanntlich ist die affine Deformationsfigur einer Geraden wieder eine Gerade von anderer Richtung, diejenige eines Kreises, eine Ellipse. Entsprechend wird aus einer Ebene wieder eine Ebene, aus einer Kugel ein Ellipsoid mit den Affinitätsachsen als Hauptachsen.

Affine Deformation der geraden Linie.

§ 7. Ist in einem zweiachsigen Koordinatensystem

$$y_1 = a_1 + b_1 x_1$$

die Gleichung einer Geraden vor der Deformation und

$$x_2 = (1 + \varepsilon_x)\, x_1\,, \quad y_2 = (1 + \varepsilon_y)\, y_1\,,$$

also

$$x_1 = \frac{x_2}{1 + \varepsilon_x}\,, \quad y_1 = \frac{y_2}{1 + \varepsilon_y}\,,$$

so folgt, mit Einsetzen dieser Werte in die Gleichung der Geraden,

$$y_2 = (1 + \varepsilon_y)\, a_1 + \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_x}\, b_1 x_2\,.$$

oder, mit den Abkürzungen

$$(1 + \varepsilon_y)\, a_1 = a_2\,, \quad \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_x}\, b_1 = b_2\,,$$

$$y_2 = a_2 + b_2 x_2$$

als lineare Gleichung der Deformationslinie II.

Man erkennt unmittelbar, dass die Gerade II mit der Geraden I parallel ist, wenn $b_2 = b_1$ ist, was dann erfolgt, wenn $\varepsilon_y = \varepsilon_x$ ist. Im allgemeinen ist $b_2 - b_1$ die Differenz der Richtungstangenten also, wenn α_1 bezw. α_2 die Winkel sind, welche die Gerade mit der X-Achse einschliesst,

$$\operatorname{tang} \alpha_2 - \operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{1 + \varepsilon_x} \operatorname{tang} \alpha_1\,.$$

Je kleiner der Unterschied zwischen ε_y und ε_x ist, um so mehr nähert sich $\operatorname{tang} \alpha_2 - \operatorname{tang} \alpha_1$ dem Grenzwert

$$d \operatorname{tang} \alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}\,,$$

sonach nähert sich $\alpha_2 - \alpha_1$ dem Grenzwert

$$d\alpha = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{1 + \varepsilon_x} \cos^2 \alpha \operatorname{tang} \alpha,$$

und, da für elastische Deformationen $\varepsilon_x < 0{,}001$ ist, also im Nenner im Vergleich mit 1 vernachlässigt werden darf, so wird hinreichend genau

(3) $$d\alpha = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \alpha \cos \alpha .$$

Für eine zur ersten normale Gerade vom Winkel $\alpha' = 90 + \alpha$ erhält man entsprechend

$$d\alpha' = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin (90 + \alpha) \cos (90 + \alpha),$$
$$d\alpha' = -(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cos \alpha \sin \alpha .$$

Bezeichnen wir die Minderung des rechten Winkels oder die Winkelverschiebung $\alpha' - \alpha$ mit μ, so ist

$$\mu = - d(\alpha' - \alpha) = d\alpha - d\alpha',$$

(4) $$\mu = 2 (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cos\alpha \sin\alpha .$$

Sie erreicht den Maximalwert

(5) $$\operatorname{Max} \mu = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)$$

für $\alpha = 45^0$ also $\alpha' = 135^0$.

Für parallele Gerade erhält man $d\alpha' = d\alpha$, also sind sie nach der Deformation wieder parallel. Ein Parallelogramm bleibt also bei affiner Deformation ein Parallelogramm.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass auch parallele Ebenen, z. B. diejenigen eines Parallelepipeds bei affiner Deformation parallel bleiben.

Affine Deformation des Kreises.

§ 8. Ist die Gleichung eines Kreises vor der Deformation

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2,$$

so entsteht daraus, wenn wieder

$$x_1 = \frac{x_2}{1 + \varepsilon_x}, \quad y_1 = \frac{y_2}{1 + \varepsilon_y}$$

gesetzt wird, die Ellipsengleichung

(6) $$\frac{x_2^2}{(1 + \varepsilon_x)^2 r^2} + \frac{y_2^2}{(1 + \varepsilon_y)^2 r^2} = 1$$

inbezug auf die Halbachsen

$$a = (1 + \varepsilon_x) r \quad \text{und} \quad b = (1 + \varepsilon_y) r.$$

Sucht man für zwei Punkte P_1, Q_1, für welche $P_1 O Q_1$ ein rechter Winkel ist, die entsprechenden P_2 und Q_2, und zieht nach P_2 den Radiusvektor OP_2, in Q_2 aber eine Tangente, so lässt sich zeigen, dass diese beiden Linien parallel sind. Hiernach sind OP_2 und OQ_2 konjugierte Halbmesser.

Affine Deformation der Kugel.

§ 9. Man bemerkt leicht, dass eine Kugel von der Gleichung

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2$$

durch affine Deformation in ein Ellipsoid mit den Halbachsen

$$a = (1 + \varepsilon_x)\, r, \quad b = (1 + \varepsilon_y)\, r, \quad c = (1 + \varepsilon_z)\, r$$

übergeht.

Die Affinitätsachsen sind im allgemeinen die einzigen rechten Winkel, welche sich nicht ändern, für welche also $\mu = o$ ist. Alle andern aus Kugelradien gebildeten rechten Winkel gehen in konjugierte Halbmesser des Ellipsoids über. Nur wenn für zwei Achsen gleiche Dehnung stattfindet, z. B. für $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, ist die Deformation in allen zu diesen Achsen parallelen Ebenen geometrisch ähnlich, es bleiben also alle Winkel unverändert.

Affine Deformation eines rechtwinkligen Parallelepipeds.

§ 10. Sind, wie in Fig. 1, die Seiten a, b, c mit den Koordinatenachsen X, Y, Z parallel, so ist deren Zunahme infolge der Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z

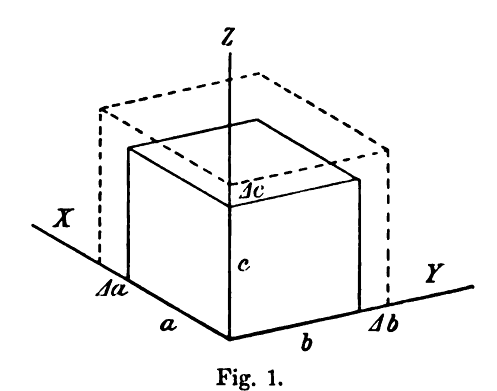


Fig. 1.

$$\Delta a = \varepsilon_x a, \quad \Delta b = \varepsilon_y b, \quad \Delta c = \varepsilon_z c.$$

Hiernach ist die Volumzunahme

$$(a + \varepsilon_x a)\,(b + \varepsilon_y b)\,(c + \varepsilon_z c) - abc$$

und die Vergrösserung der Volumeinheit, sie werde Expansion genannt und mit e bezeichnet,

$$e = (1 + \varepsilon_x)\,(1 + \varepsilon_y)\,(1 + \varepsilon_z) - 1$$

oder, bei Vernachlässigung der Produkte $\varepsilon_x\varepsilon_y$, $\varepsilon_y\varepsilon_z$, $\varepsilon_z\varepsilon_x$, $\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$,

(7) $$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Diese Gleichung gilt übrigens für affine Deformation jedes Körpers. Denkt man sich nämlich, wie in § 3 angedeutet, einen beliebigen Körper in n rechtwinklige Parallelepipede zerlegt, unter n eine grosse bis ∞ wachsende Zahl verstanden, so wird bei affiner Deformation nach Richtung der Kanten a, b, c jedes Element eine Expansion nach Gleichung (7) erfahren. Die Gesamtexpansion hat daher den gleichen Wert.

Erweist sich hiermit u. A. die Lage eines rechtwinkligen Parallelepipeds gegenüber den Affinitätsachsen im Hinblick auf die Expansion als unwesentlich, so ist dieselbe von grossem Einfluss auf die Dehnung der Seiten und die Änderung der Winkel zwischen den Flächen, doch kann hier von einer rechnerischen Verfolgung dieser Fragen abgesehen werden.

Die Dehnung ausgedrückt durch Deformationskoordinaten.

§ 11. Die Ebenen, durch welche wir uns in § 3 den elastischen Körper zerlegt dachten und welche die Seiten der elementaren Parallelepipede bilden, gehen bei der Deformation in schwach gekrümmte Flächen über. Diese Krümmung wird in den Grenzflächen der Körperelemente um so unmerklicher, je kleiner diese sind, und ein unendlich kleines deformiertes Element darf für sich allein als ebenflächig betrachtet werden. Daraus folgt, dass seine Kanten gerade Linien sind, welche jedoch nicht mehr parallel und nicht mehr rechtwinklig unter einander zu sein brauchen.

Bedeutet P_1 den durch die Koordinaten x, y, z bestimmten Körperpunkt, Q_1 einen Nachbarpunkt mit den Koordinaten $x + \mathrm{d}x$, $y + \mathrm{d}y$, $z + \mathrm{d}z$ und $\mathrm{d}s$ den Abstand $P_1 Q_1$ vor der Deformation, ferner ξ, η, ζ die rechtwinkligen Projektionen des elastischen Weges $P_1 P_2$, welche **Deformationskoordinaten** heissen mögen und als bekannte oder unbekannte Funktionen von x, y, z aufzufassen sind, ferner entsprechend

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi + \mathrm{d}\xi &= \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\,\mathrm{d}z, \\ \eta + \mathrm{d}\eta &= \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \eta}{\partial z}\,\mathrm{d}z, \\ \zeta + \mathrm{d}\zeta &= \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\,\mathrm{d}z \end{aligned}\right.$$

die Projektionen des elastischen Weges $Q_1 Q_2$, so ist im deformierten Zustand $P_2 Q_2$ die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Seiten aus den ursprünglichen Seiten $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ und aus den Zuwachsgrössen $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\zeta$ bestehen. Ist ε die Dehnung von $\mathrm{d}s$ so ist $P_2 Q_2 = (1 + \varepsilon)\,\mathrm{d}s$, also

$$(1+\varepsilon)^2\,\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x+\mathrm{d}\xi)^2 + (\mathrm{d}y+\mathrm{d}\eta)^2 + (\mathrm{d}z+\mathrm{d}\zeta)^2$$

oder, bei Vernachlässigung von ε^2, $(\mathrm{d}\xi)^2$, $(\mathrm{d}\eta)^2$, $(\mathrm{d}\zeta)^2$,

$$\mathrm{d}s^2 + 2\varepsilon\,\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z^2 + 2\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}z.$$

Subtrahiert man hiervon

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

so folgt nach Division mit $2\mathrm{d}s^2$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s^2},$$

oder, mit Einführung der Werte für $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\zeta$ aus Gleichungen (8) sowie der Beziehungen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \cos\beta,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \cos\gamma,$$

unter α, β, γ die Winkel zwischen $\mathrm{d}s$ und X bezw. Y und Z verstanden,

$$(9)\quad \varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos^2\gamma$$
$$+ \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta.$$

Einführung der Dehnungen und Winkelverschiebungen.

§ 12. Die in den Gleichungen (9) vorkommenden partiellen Differenzialverhältnisse lassen sich geometrisch deuten.

In $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ ist $\partial\xi$ die Verlängerung von $\mathrm{d}x$, also ist

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \varepsilon_x.$$

$\frac{\partial\eta}{\partial x}$ ist der Winkel, um welchen sich die ursprünglich zu X parallele Strecke $\mathrm{d}x$ bei der Deformation dreht, entsprechend $\frac{\partial\xi}{\partial y}$ die Drehung der Strecke $\mathrm{d}y$, demnach

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}$$

der Winkel, um welchen sich der ursprünglich rechte Winkel mit dem Scheitel P, den die Elemente $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ miteinander bilden, infolge der Deformation vermindert, die Winkelverschiebung xy. Mit der Abkürzung μ_{xy} wird also

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y} = \mu_{xy}.$$

Bei analoger Übertragung dieser Bezeichnungen auf die übrigen Differenzialquotienten in den Gleichungen (9) erhält man folgende Übersicht:

$$
(10) \quad \left\{
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}; & \mu_{yz} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}; & \mu_{zx} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}; \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}; & \mu_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x};
\end{aligned}
\right.
$$

und mit Anwendung auf Gleichung (9) erhält diese die Form

$$
\begin{aligned}
(11) \quad \varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \gamma \\
+ \mu_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \mu_{zx} \cos \gamma \cos \alpha + \mu_{xy} \cos \alpha \cos \beta.
\end{aligned}
$$

Das Deformations-Ellipsoid.

§ 13. Nach den vorstehenden Betrachtungen geht das ursprünglich rechtwinklig parallelepipedische Körperelement in ein Sechsflach über, in welchem die drei durch P gehenden Kanten die neuen Längen

$$(1 + \varepsilon_x)\, dx, \qquad (1 + \varepsilon_y)\, dy, \qquad (1 + \varepsilon_z)\, dz$$

haben, von denen sich die drei Gegenkanten nur um kleine Grössen höherer Ordnung unterscheiden, während die Flächen, die sich in P schneiden, mit einander die Winkel

$$\frac{\pi}{2} - \mu_{yz}, \qquad \frac{\pi}{2} - \mu_{zx}, \qquad \frac{\pi}{2} - \mu_{xy}$$

bilden.

Von einem Parallelepiped ist das Deformations-Sechsflach nur durch kleine Grössen höherer Ordnung verschieden. Da man diese vernachlässigen darf, so stellt sich die Deformation eines elastischen Körperelements allgemein als eine affine dar, und man kann somit alles für affine Formänderung eines endlichen Körpers Gefundene auf die Formänderung eines Körperelements übertragen.

Insbesondere darf angenommen werden, dass eine unendlich kleine Kugel nur in ein Ellipsoid übergehen kann, dessen drei Achsen winkelbeständig bleiben und von denen eine die Richtung des grössten, eine zweite die Richtung des kleinsten Wertes ε in dem betreffenden Punkte darstellt. Man nennt die drei Achsen die Dehnungshauptachsen oder kurz Hauptachsen, die entsprechenden Dehnungen die Hauptdehnungen.

Berechnung der Hauptdehnungen.

§ 14. Die Berechnung der Hauptdehnungen kommt darauf hinaus, das Maximum oder Minimum von ε aus Gleichung (11) unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

(12) $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

zu ermitteln, eine bekannte Aufgabe [1]), welche für die Hauptdehnungen ε_h auf die Gleichung dritten Grades

(13) $$4(\varepsilon_x - \varepsilon_h)(\varepsilon_y - \varepsilon_h)(\varepsilon_z - \varepsilon_h) - (\varepsilon_x - \varepsilon_h)\mu^2_{yz} - (\varepsilon_y - \varepsilon_h)\mu^2_{zx} - (\varepsilon_z - \varepsilon_h)\mu^2_{xy} + \mu_{yz}\mu_{zx}\mu_{xy} = 0$$

führt, deren drei Wurzeln

$$\varepsilon_h = \varepsilon_1 \text{ oder } \varepsilon_2 \text{ oder } \varepsilon_3$$

die gesuchten Hauptdehnungen sind.

Falls die Winkelverschiebungen μ_{yz}, μ_{zx}, μ_{yz} Null sind, so wird

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z.$$

Die Koordinatenachsen sind also bereits die Hauptachsen, und man erhält für Gleichung (11) die einfachere Form

(14) $$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma.$$

Wenn von den Hauptdehnungen eine Null ist, wird die Gleichung (13) quadratisch, wenn zwei Hauptdehnungen Null sind, linear. Im Hinblick auf diese wichtigen Sonderfälle unterscheiden wir von dem allgemeinsten dreiachsigen den zweiachsigen und den einachsigen Deformationszustand.

1) Vgl. Stegemann-Kiepert, Grundriss der Differential- u. Integralrechnung 9. Aufl. 1. Teil. § 160.

II. Abschnitt.

Der mechanische Zustand eines gespannten Körperelements.

Einführung der Kräfte und der Spannungszustände.

§ 15 Ein parallelepipedisches Element eines materiellen Körpers hängt, wenn es nicht an der Oberfläche liegt, in sämtlichen sechs Flächen mit Nachbarelementen zusammen und kann in jeder dieser Flächen eine Kraftwirkung empfangen. Ausser diesen sogenannten Oberflächenkräften oder Spannkräften unterliegt es noch der Wirkung von inneren Kräften, z. B. der Schwere oder des Magnetismus, welche mit dem Volum zusammenhängen, daher wohl auch Volumkräfte genannt werden. Ist die Resultante aller Kräfte Null, so bleibt das Element in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung, ist sie nicht Null, so tritt Beschleunigung ein.

Sind sämtliche Oberflächenkräfte Null, so ist das Element spannungslos oder frei. Bei irdischen Körpern tritt dieser Zustand nur beim freien Fall ein.

Während die inneren Kräfte meist aus Grösse und Lage des materiellen Elements berechnet werden können, ist das bei den Spannkräften nicht der Fall.

Um ein vorläufiges Bild von dem Spannungszustand eines Körperelements zu gewinnen, stellen wir uns dasselbe zunächst als Würfel von 1 cm Seite vor und zwar als das Resultat der Kreuzung von drei rechtwinklig zu einander gerichteten Fadenbündeln, je von 1 qcm Querschnitt und den Spannkräften σ_1, σ_2, σ_3. Wir nennen die Spannkraft pro Flächeneinheit spezifische Spannung oder kurz Spannung, insbesondere, wenn sie normal zur Oberfläche gerichtet ist, Hauptspannung, und nehmen für Hauptspannungskoordinaten die Richtungen σ_1, σ_2, σ_3 entsprechend nach X, Y, Z. Ist eine Hauptspannung negativ, so ist darunter Druck zu verstehen.

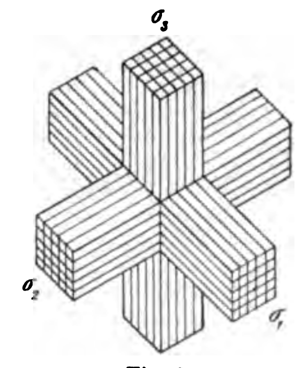


Fig. 2.

Sind die Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 sämtlich von Null verschieden, so heisse der Spannungszustand ein dreiachsiger im Unterschied zu dem zweiachsigen und einachsigen, welche entstehen, wenn eine oder zwei Hauptspannungen Null werden. Um mit dem einfachsten Falle zu beginnen, betrachten wir zunächst den einachsigen Spannungszustand.

Der einachsige Spannungs-Zustand.

§ 16. Indem wir die Spannungen nach Y und Z verschwinden lassen, erhalten wir die Gleichungen

(15) $$\sigma_1 \neq o\text{[1]}, \quad \sigma_2 = o, \quad \sigma_3 = o.$$

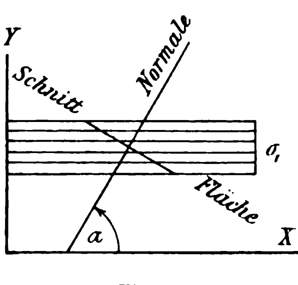


Fig. 3.

Stellt man sich vor, dass jeder Faden des mit der X-Achse parallelen Bündels die Spannkraft von 1 kg ausübt, so ist σ_1 zugleich die Anzahl der Kraftfäden für 1 qcm.

Wird dieses Bündel durch eine Ebene geschnitten (s. Fig. 3), deren Normale mit $+X$ den Winkel α einschliesst, so ist die Grösse der Schnittfläche $F = \frac{1}{\cos\alpha}$ qcm. Auf 1 qcm derselben kommen sonach $\frac{\sigma_1}{F}$ oder $\sigma_1 \cos\alpha$ Kraftfäden, und die spezifische Spannung in der Schnittfläche F, sie werde p genannt, ist demnach

(16) $$p = \frac{\sigma_1}{F} = \sigma_1 \cos\alpha.$$

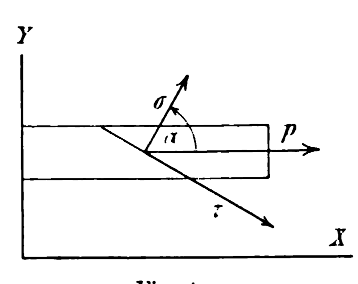


Fig. 4.

Ihre Richtung ist die von σ_1, d. h. die der X-Achse.

Zerlegt man p in zwei zu einander rechtwinklige Komponenten σ und τ, von denen σ zu F normal gerichtet, τ mit F parallel ist, und nennt σ Normal- oder Zugspannung, τ Tangential- oder Schubspannung, so wird nach Fig. 4

$$\sigma = p \cos\alpha, \qquad \tau = p \sin\alpha$$

1) Das Zeichen $\neq$ bedeutet „nicht gleich“.

oder nach Gleichung (16)

(17) $$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha,$$

(18) $$\tau = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha.$$

Verändert man α zwischen den Grenzen $\alpha = 0$ bis $\alpha = 90^0$, so erhält man

(19) $$\text{Max } p = \sigma_1 \quad \text{für} \quad \alpha = 0 \quad ,$$

(20) $$\text{Max } \sigma = \sigma_1 \quad „ \quad \alpha = 0 \quad , \quad \text{dabei } \tau = 0$$

(21) $$\text{Max } \tau = \frac{\sigma_1}{2} \quad „ \quad \alpha = 45^0, \quad „ \quad \sigma = \frac{\sigma_1}{2}.$$

Die Kräfte p, σ, τ sind in Fig. 4 so dargestellt, wie sie von dem auf der rechten Seite des Schnittes liegenden Stabteil auf den linken Teil ausgeübt werden. Wird $\alpha > 90^0$, so wird die vorher rechtsschnittige Seite zur linksschnittigen. Hiermit erklärt es sich, dass jetzt mit $\cos\alpha$ nach Gleichung (16) p negativ wird, weil es die vom linken auf den rechten Teil ausgeübte Kraft bedeutet. σ bleibt dabei positiv, da es nach wie vor eine Zugspannung bedeutet, so lange σ_1 positiv ist. τ hingegen wird negativ, was sich geometrisch darin zeigt, dass die entsprechende Richtung aus der Richtung σ durch eine Viertelwendung nach links gewonnen wird, während man von σ aus in die positive Richtung von τ durch eine Viertelwendung nach rechts gelangt.

Die Ausdrücke für p, σ, τ lassen sich leicht konstruieren. In Fig. 5 sind die den Flächenrichtungen von $\alpha = o$ bis $\alpha = 90^0$ entsprechenden Werte von σ und τ als Vektoren auf ihren Richtlinien aufgetragen, während p, dessen Richtung unverändert diejenige von σ bleibt, zur Veranschaulichung des Zusammenhanges auf der Flächennormale als Strecke OD aufgetragen ist. Die Kurve für D ist ein Halbkreis mit σ_1 als Durchmesser, während die beiden anderen sehr einfach zu konstruierenden Kurven sich, auf rechtwinklige Koordinaten bezogen, durch Gleichungen höheren Grades darstellen würden.

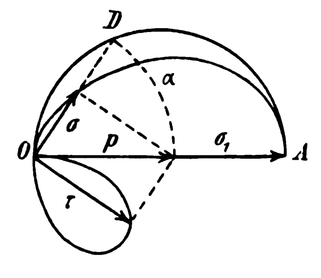


Fig. 5.

Wären nicht σ_1 und α bekannt, sondern nur für irgend eine unbekannte Schnittrichtung σ und τ, so könnte man stets finden die Gesamtspannung

(22) $$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2},$$

ferner die Schnittrichtung aus der Gleichung

(23) $$\text{tang } \alpha = \frac{\tau}{\sigma}$$

und nach den Gleichungen (17) und (23) die Hauptspannung

(24) $$\sigma_1 = \frac{\sigma}{\cos^2\alpha} = \sigma\,(1 + \text{tang}^2\alpha) = \sigma + \frac{\tau^2}{\sigma}.$$

Sind σ_x, σ_y, σ_z, die Normalspannungen in drei zu einander rechtwinkligen Schnittflächen und α, β, γ die Winkel ihrer Normalen mit σ_1, so ist nach Gleichung (17)

(25) $$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\alpha, \quad \sigma_y = \sigma_1 \cos^2\beta, \quad \sigma_z = \sigma_1 \cos^2\gamma,$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (12)

(26) $$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1$$ [1])

Der zweiachsige Spannungszustand.

§ 17. Sind X und Y die Achsen der vorhandenen Hauptspannungen, so wird der Zustand definiert durch die Gleichungen

(27) $$\sigma_1 \gtrless o, \quad \sigma_2 \gtrless o, \quad \sigma_3 = o.$$

Dieser Zustand unterscheidet sich von dem vorigen durch das Hinzutreten von σ_2, welches als Wirkung eines zu Y parallelen Fadenbündels von σ_2 Kilogrammfäden für 1 qcm der zu Y normalen Würfelfläche aufgefasst werden kann. Da dieselben mit der zu X normalen Fläche parallel sind, so schneidet keiner der Fäden diese Fläche. Die Spannung in derselben wird also durch σ_2 nicht geändert. Anders ist jedoch der Einfluss auf die Einheit einer Fläche, deren Normale ON Fig. 6 mit der X-Achse den Winkel α, mit der Y-Achse den Winkel β einschliesst. Für diese ist offenbar analog mit Gleichung (16)

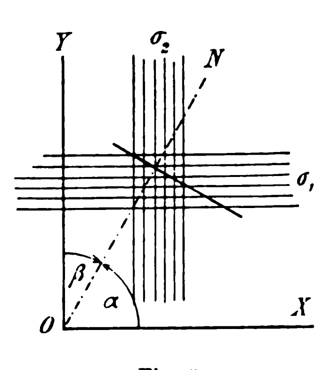


Fig. 6.

die Schnittzahl der zu X parallelen Fäden $\sigma_1 \cos\alpha$,

" " " " Y " " $\sigma_2 \cos\beta$.

Die diesen Schnittzahlen gleichen Kräfte $\sigma_1 \cos\alpha$ und $\sigma_2 \cos\beta$ schliessen einen rechten Winkel ein und ergeben sonach als Resultante (s. Fig. 7)

(28) $$p = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta}.$$

Dieselbe liegt, wie immer auch die Schnittfläche gerichtet sei, nämlich auch dann, wenn sie nicht zu Z parallel ist, in der XY-Ebene, bildet also mit Z einen rechten Winkel. Bezeichnen wir mit λ, μ und ν die Winkel dieser Resultante p mit den Achsen X, Y, Z, so ist

1) Vergl. § 21.

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\sigma_2 \cos \beta}{\sigma_1 \cos \alpha}, \quad \operatorname{tang} \mu = \frac{\sigma_1 \cos \alpha}{\sigma_2 \cos \beta}, \quad \operatorname{tang} \nu = \infty .$$

ı Unterschied zu dem einachsigen Spannungszustand, bei welchem p zwar seine Grösse änderte, seine Rich- ·arallel mit X jedoch behielt, bleibt zweiachsigen nur der Ebene der beiden , hier der XY-Ebene treu, ändert in derselben seine Lage, wenn α sich ändern.

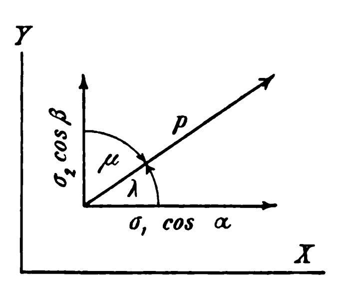


Fig. 7.

.egt auch die Schnittnormale in der ›ene, so ist $\gamma = 90^0$, $\alpha + \beta = 90^0$, ›s $\beta = \sin \alpha$, demnach geht die Glei- (29) über in

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \operatorname{tang} \alpha, \qquad \operatorname{tang} \mu = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{cotg} \alpha .$$

ı allgemeinen sind hiernach λ und α bezw. μ und β verschieden. Nur $\sigma_2 = \sigma_1$ wird, erhält man $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$.

ür $\sigma_2 = \sigma_1$ und $\gamma \neq 90^0$ erhält man nach den Gleichungen (12) und (28)

$$p = \sigma_1 \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sigma_1 \sin \gamma ;$$

eibt also p konstant, wenn man die Schnittfläche um die Z-Achse dreht.

rsetzt man p durch eine Normalspannung σ und eine Tangentialspannung indet man σ als Summe der Normalkomponenten, welche die Spannungen X und nach Y einzeln ergeben. Man erhält also in Erweiterung der ıng (17)

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta .$$

ngentialspannung kann man nach der allgemein giltigen Gleichung (22) aus den Gleichungen (28) und (32) finden als

$$\tau^2 = \sigma_1{}^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2{}^2 \cos^2 \beta - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta)^2 .$$

Spannungsellipse und Spannungskreis.

ür den wichtigen Spezialfall $\gamma = 90^0$, für welchen $\alpha + \beta = 90^0$ wird, § 18. man aus Gleichung (28)

$$p^2 = \sigma_1{}^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2{}^2 \sin^2 \alpha ,$$

eichung (32)

(35) $$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha.$$

endlich aus Gleichung (33)

(36) $$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Die Grössen p, σ, τ lassen sich für diesen Spezialfall leicht konstruieren. In Fig. 8 ist OBA die unter dem Winkel α gezogene Flächennormale, auf welcher durch die Kreise um O die Strecken

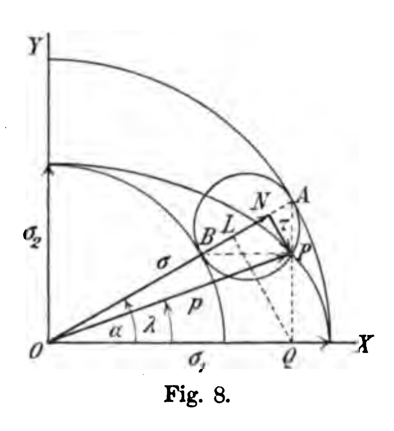


Fig. 8.

$$OA = \sigma_1, \qquad OB = \sigma_2$$

angeschnitten werden, deren Projektionen

$$OQ = \sigma_1 \cos \alpha, \quad QP = \sigma_2 \sin \alpha$$

die Koordinaten von P sind. Die Strecke OP genügt mithin der Gleichung (34), stellt also p dar, und zwar nach Grösse und Richtung, denn offenbar ist

$$\operatorname{tang} QOP = \frac{QP}{OQ} = \frac{\sigma_2 \sin \alpha}{\sigma_1 \cos \alpha},$$

nach Gleichung (30) also

$$\sphericalangle\, QOP = \lambda.$$

Ohne die Gleichungen (35) und (36) zu Hilfe nehmen zu müssen; erkennt man, dass

$$ON = \sigma, \quad NP = \tau$$

ist, auch lässt sich mit Zuhilfenahme des Lotes QL leicht ablesen, dass diese Strecken jenen Gleichungen genügen.

Wiederholt man die Konstruktion für eine Reihe verschiedener Werte von α, indem man X und Y beibehält, so beschreibt P eine Ellipse, ist doch die Konstruktion eine bekannte Ellipsenkonstruktion.

Bewirkt man die Änderung von α in der Weise, dass man den Strahl OBA festhält und das Koordinatensystem dreht, so bleiben auch die Punkte A und B fest. Der Punkt P hingegen beschreibt einen Kreis mit AB als Durchmesser, den Spannungskreis. Da NP einen grössten Wert hat, wenn N in den Mittelpunkt des Kreises fällt, was für $\alpha = 45^0$ eintritt, so erkennt man unmittelbar, dass τ für $\alpha = 45^0$ einen Maximalwert $\operatorname{Max} \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ annimmt.

Ist eine der beiden Hauptspannungen, z. B. σ_2, negativ, so nimmt die Konstruktion mit gleicher Bedeutung der Buchstaben die Gestalt Fig. 9 an.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall $\sigma_2 = -\sigma_1$, welchen Fig. 10 darstellt. Hier wird die Ellipse ein Kreis mit dem Halbmesser σ_1 und für $= \pm 45^0$ erhält man

$$\text{Max}\ \tau = \frac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} = \sigma_1, \quad \sigma = o. \tag{37}$$

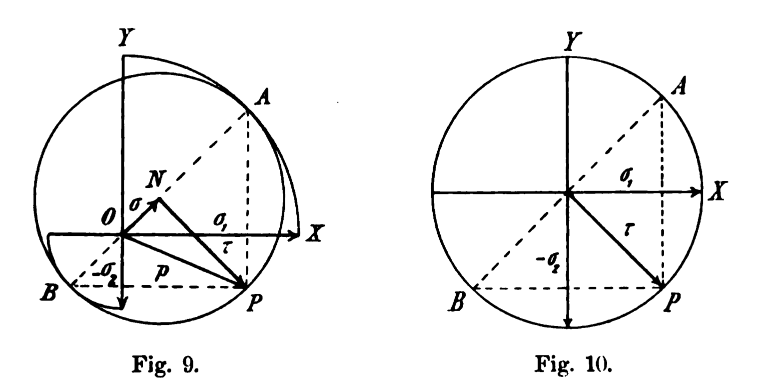


Fig. 9. Fig. 10.

Für $\sigma_2 = o$, d. h. für den einachsigen Spannungszustand geht die Ellipse Fig. 8 in den wagerechten Kreisdurchmesser $2\,\sigma_1$ über. Die Figur ist alsdann eine Variation zu Fig. 5.

Berechnung der Hauptspannungen.

§ 19. Beim einachsigen Spannungszustand genügte, wie wir sahen, die Kenntnis der Spannungskomponenten σ und τ für einen beliebig gerichteten Querschnitt, um die Hauptspannung nach Grösse und Richtung zu ermitteln. Beim zweiachsigen Spannungszustand muss man noch eine weitere Spannung kennen.

Sind z. B. die Schnittflächen der bekannten Spannungen normal zu X und Y Fig. 11, diese Achsen aber nicht Hauptspannungsrichtungen, so wären

$$\sigma_x,\ \tau_x,\ \sigma_y \text{ als bekannt,}$$
$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \alpha \text{ als unbekannt}$$

anzusehen, unter α den Winkel verstanden, um welchen σ_1 gedreht werden muss, um in die Richtung $+X$ zu gelangen. Nach Gleichung (36) ist dann

$$38) \begin{cases} \tau_x = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -(\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \sin \alpha, \end{cases}$$

also ergibt sich

$$\tau_y = -\tau_x. \tag{39}$$

(Vergl. die Vorzeichenregel für τ in § 16.)

Ferner findet man nach Gleichung (35) für $\sigma = \sigma_x$ bezw. $\sigma = \sigma_y$

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_1 &= (\sigma_2 - \sigma_1)\sin^2\alpha, \\ \sigma_y - \sigma_1 &= (\sigma_2 - \sigma_1)\cos^2\alpha. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Multipliziert man die Gleichungen (40) mit einander, so erhält man

$$(\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) = (\sigma_2 - \sigma_1)^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha,$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (38)

$$(\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) = \tau_x^2. \tag{41}$$

In gleicher Weise lässt sich ableiten

$$(\sigma_x - \sigma_2)(\sigma_y - \sigma_2) = \tau_x^2. \tag{42}$$

Aus (41) aber erhält man σ_1, aus (42) σ_2 zu

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\tau_x^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2}, \tag{43}$$

ferner ergibt sich

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \tag{44}$$

und, nach Gleichung (40),

$$\sin^2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}. \tag{45}$$

Damit sind die Hauptspannungen nach Grösse und Richtung gefunde
Gleichzeitig hat sich gezeigt, dass für zwei rechtwinklige, zur Z-Ach parallele Ebenen nach Gleichung (39) gleich grosse Tangentialspannung sta findet, τ_y und τ_x also nicht unabhängig von einander gewählt werden dürf und weiter, dass die Summe der Normalspannungen in diesen Flächen na Gleichung (44) konstant, d. h. von α unabhängig ist.

Graphische Ermittelung der Hauptspannungen.

§ 20. Sehr einfach gestaltet sich die soeben behandelte Aufgabe mit Hilfe Spannungskreises. Um denselben über die X-Achse zu zeichnen, findet n zunächst aus σ_x und τ_x den Punkt P, weiter aber aus Gleichung (44)

$$OM = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{46}$$

s Mittelpunktsabstand. Hiermit ist MP, der Radius des Kreises gefunden. ıdem man den Kreis schlägt und die Linien PA und PB zieht, erhält man e Richtungen von σ_2 und σ_1.
ezeichnet man den (in Fig. 11 cht ausgeführten) Halbmesser ΓP mit h, so ist offenbar nach ig. 11

$$\text{17)}\quad \left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = OM \pm h,$$

emnach nach Gleichung (43)

$$\text{18)}\quad h = \sqrt{\tau_x^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2},$$

as leicht unmittelbar aus Fig. 11 bzulesen ist. (Vergl. Anm. zu 22.)

Mit Hilfe des Spannungs-reises lassen sich noch andere hnliche Aufgaben leicht lösen.

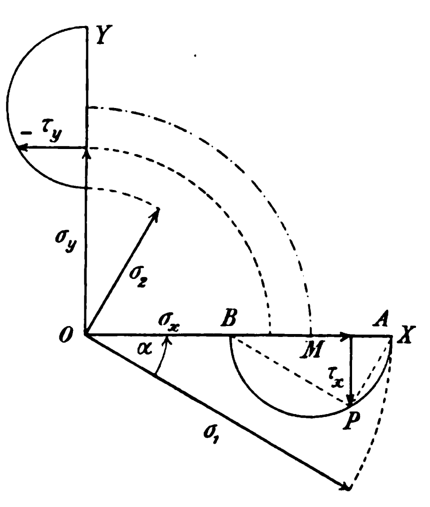


Fig. 11.

Der dreiachsige Spannungszustand bezogen auf Hauptkoordinaten.

§ 21. Da hier keine der drei Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 Null ist, erhält man für eine Schnittfläche, deren Normale mit X, Y, Z die Winkel α, β, γ einschliesst, analog § 16 und § 17 die folgenden Komponenten:

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{als Wirkung von } \sigma_1 & \text{in der } X\text{-Richtung} & p_x = \sigma_1 \cos\alpha, \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\ \sigma_2 & \text{"}\quad\text{"}\ Y\quad\text{"} & p_y = \sigma_2 \cos\beta, \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\ \sigma_3 & \text{"}\quad\text{"}\ Z\quad\text{"} & p_z = \sigma_3 \cos\gamma. \end{array}\right.$$

Da die Komponenten miteinander rechte Winkel bilden, so ist ihre Resultante in Analogie mit Gleichung (28)

$$(50)\qquad p = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma}.$$

Die Beiträge der Hauptspannungen zu der Normalspannung σ in der gedachten Schnittfläche sind

$$\sigma_1 \cos^2\alpha, \quad \sigma_2 \cos^2\beta, \quad \sigma_3 \cos^2\gamma,$$

sonach wird, da dieselben gleiche Richtung haben, analog Gleichung (32)

(51) $$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma,$$

und aus den Gleichungen (50) und (51) findet sich analog Gleichung (33)

(52) $$\tau^2 = \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma - (\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma)^2.$$

In den Gleichungen (49) bis (52) sind die Winkel α, β, γ noch der bekannten Bedingung Gleichung (12)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

unterworfen.

Das Spannungsellipsoid.

22. Eine bildliche Darstellung der Änderungen von p, σ, τ mit α, β, γ in einer Ebene ist jetzt nicht mehr möglich; wohl aber kann durch Darstellung in zwei Projektionen oder durch ein Modell das Gesetz, nach welchem sich p bei Veränderung der Schnittrichtung ändert, veranschaulicht werden.

Würde z. B. für jede mögliche Schnittrichtung bei gegebenen Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 die nach Gleichung (50) sich ergebende Spannung p auf einem ihrer Richtung parallelen Halbstrahl OP aufgetragen, so ergibt sich eine Fläche mit den Koordinaten p_x, p_y, p_z (s. Gl. 49), für welche man leicht die Gleichung anschreiben kann. Addiert man nämlich die aus den Gleichungen (49) abgeleiteten Ausdrücke

$$\left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 = \cos^2 \alpha, \quad \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 = \cos^2 \beta, \quad \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 = \cos^2 \gamma$$

und beachtet Gleichung (12), so erhält man

(53) $$\left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1,$$

d. i. die Gleichung eines Ellipsoids mit den Halbachsen σ_1, σ_2, σ_3, welches das Spannungsellipsoid genannt wird.

Aus dieser Darstellung von p geht hervor, dass der algebraisch grösste und kleinste vorkommende Wert von p in einer der drei Hauptachsen zu suchen ist. Für diese Achsen ist nach den Gleichungen (50) und (52) $p = \sigma_1$ bezw. σ_2, σ_3 und $\tau = o$.

Eine weitere Veranschaulichung des Zusammenhanges zwischen p und den Stellwinkeln α, β, γ gibt Fig. 12. ON ist die Schnittnormale. Auf derselben sind die drei Hauptspannungen von O aus aufgetragen. Durch die mit σ_1, σ_2, σ_3 bezeichneten Endpunkte dieser Strecken sind Ebenen

gelegt, welche entsprechend zu X, Y, Z normal sind und auf diesen Achsen die Strecken (s. Gleichung 49)

$$p_x = \sigma_1 \cos \alpha, \qquad p_y = \sigma_2 \cos \beta, \qquad p_z = \sigma_3 \cos \gamma,$$

d. h. die rechtwinkligen Komponenten von p abschneiden. Der gemeinschaftliche Punkt P dieser drei Ebenen ist offenbar der Endpunkt von p

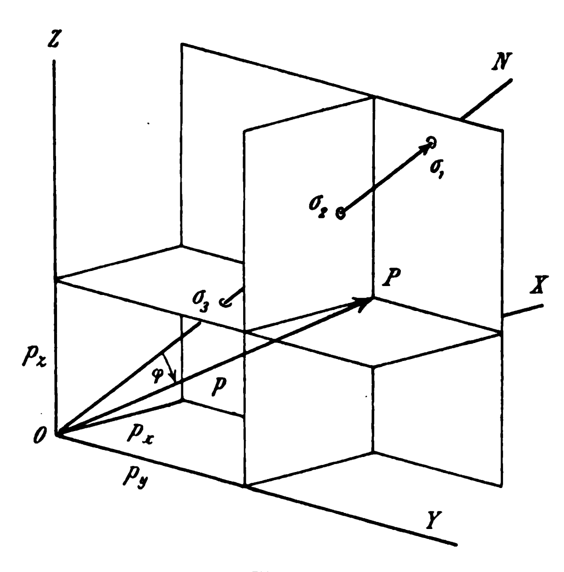


Fig. 12.

für die gewählte Richtung ON, also ein Punkt des Spannungsellipsoids. Projiziert man P auf ON, so erhält man in der Projektion und in dem projizierenden Lot die Komponenten σ und τ[1]. Die Ermittelung von p, σ, τ ist hiermit auf eine Aufgabe der darstellenden Geometrie zurückgeführt.

Einführung beliebiger rechtwinkliger Koordinaten. Die Cauchyschen Gleichungen.

§ 23 Sind für einen Körperpunkt nicht die Hauptspannungen, sondern die Spannungen für drei beliebige rechtwinklige Flächen gegeben, so kann jede dieser rechtschnittigen Spannungen inbezug auf ein den Schnittflächen entsprechendes Koordinatensystem X, Y, Z in drei Komponenten, eine Normalspannung und zwei Tangentialspannungen zerlegt werden.

---

1) Eine neue Art der graphischen Darstellung des Spannungszustandes gibt O. Mohr, Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing. 1900, S. 1524 u. 1572. Die Darstellung ist eine auf den Raum ausgedehnte Anwendung des Spannungskreises Fig. 8.

Wir kennzeichnen jetzt die Tangentialspannungen durch einen ersten Index, den Schnittindex, nach der Achse, welche durch die Fläche rechtwinklig geschnitten wird, und durch einen zweiten, den Richtungsindex nach der Achse, welche die Richtung der Komponente angibt. Für die Normalspannungen stimmt der Richtungsindex mit dem Schnittindex überein; bei ihnen genügt daher ein Index. Nehmen wir hier eine Tangentialspannung, wie üblich, als positiv an, wenn sie nach der positiven Seite ihrer Richtungsachse wirkt, so weicht diese Vorzeichenregel von der in § 16 gegebenen ab, deren konsequente Durchführung hier weniger bequem sein würde. Hier-

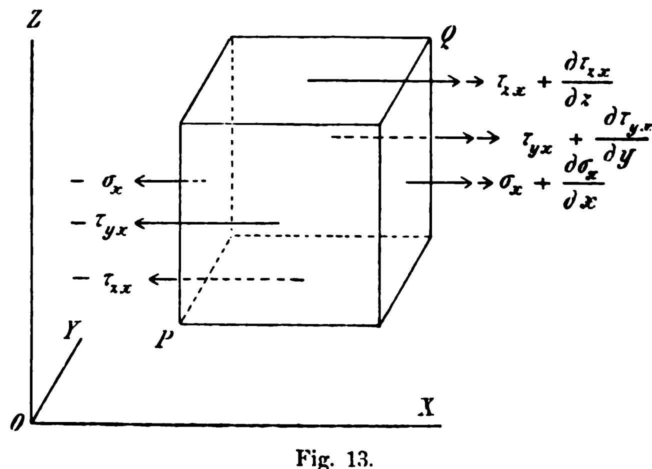


Fig. 13.

nach bedeutet für einen Punkt P (Fig. 13) mit den Koordinaten x, y, z:

σ_x die X-schnittige, d. h. die in einer zu X normalen Schnittfläche wirkende Zugspannung,

τ_{yx} die Y-schnittige Schubspannung nach $+X$,

τ_{zx} „ Z „ „ „ „ „

σ_y, τ_{zy}, τ_{xy} die entsprechenden nach $+Y$ gerichteten Komponenten,

σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} „ „ „ $+Z$ „ „ .

Entsprechend bezeichnen die in Fig. 13 eingeschriebenen Ausdrücke

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \qquad \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \qquad \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z},$$

die Komponenten nach X für einen Punkt Q, dessen Koordinaten $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$ sind, vorausgesetzt, dass für die gewählte Einheit die Differenzialquotienten als hinreichend gleichbleibend angesehen werden können. Ist

ın der in Fig. 13 dargestellte Körper ein Würfel von 1 cm Seite, so erbt sich aus den eingeschriebenen nach $-X$ oder $+X$ wirkenden Spannäften die algebraische Summe

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z},$$

elche Null sein muss, wenn keine Volumkraft nach X wirkt und die Behleunigung nach X Null ist.

Andernfalls erhält man, wenn noch bedeutet:

k_x, k_y, k_z die Komponenten von Volumkräften (Schwere, Magnetismus) für die Volumeinheit,

φ_x, φ_y, φ_z die Beschleunigungskomponenten nach X, Y, Z,

γ das Gewicht der Volumeinheit,

ie Cauchyschen Gleichungen[1])

$$\text{4)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + k_x &= \frac{\gamma}{g}\varphi_x, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + k_y &= \frac{\gamma}{g}\varphi_y, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + k_z &= \frac{\gamma}{g}\varphi_z, \end{aligned}\right.$$

elche ausdrücken, dass die Summe der Komponenten, welche je nach X, , Z wirken, gleich ist dem Produkte aus der Masse des Würfels und seiner ntsprechenden Beschleunigungskomponente.

Falls die Differenzialquotienten nicht konstant, also die zweiten Differenialquotienten nicht Null sind, d. h. für den allgemeinen Fall, beschränkt ich die Gültigkeit der Gleichungen (54) auf ein unendlich kleines Körperlement.

Dualität der Schubspannungen.

§ 24. Während in Fig. 13 die in gegenüberliegenden Flächen wirkenden Zugspannungen in einer und derselben Geraden liegen, haben die Schubspannungen einen Abstand gleich der Einheit, und ergeben daher, da die Zuwachsgrössen als Grössen niederer Ordnung vernachlässigt werden können, Kräftepaare, welche bestrebt sind, das Element zu drehen. Um X drehen z. B. lie Paare τ_{yz} und τ_{zy} und zwar beide in entgegengesetztem Sinne. Daher nuss, damit Gleichgewicht stattfindet, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ sein; überhaupt müssen die Schubspannungen, welche im Index dieselben Buchstaben in verschiedener

1) s. Cauchy, Exercises mathématiques. t. II (1829) p. 111.

Reihenfolge enthalten, einander gleich sein. Die Indexfolge ist sonach nur für die Richtung, nicht aber für die Grösse der Schubspannungen von Interesse, und man kann, falls nur die Grösse in Betracht kommt, jederzeit setzen

$$(55) \quad \begin{cases} \tau_{yz} \text{ für } \tau_{zy}, \\ \tau_{zx} \quad „ \quad \tau_{xz}, \\ \tau_{xy} \quad „ \quad \tau_{yx}. \end{cases}$$

Hiernach vermindert sich in den Cauchyschen Gleichungen (54) die Zahl der Unbekannten um drei.

Die gewählte Reihenfolge der Indexbuchstaben gibt zugleich die Richtung an, in welcher eine Schubspannung das Element zu drehen sucht. Es dreht z. B. τ_{xy} in der Richtung von $+X$ nach $+Y$, τ_{yx} von $+Y$ nach $+X$.

Die Spannung in schiefer Fläche, ausgedrückt durch rechtschnittige Spannungen.

§ 25. In einem unendlich kleinen rechtwinkligen Tetraeder (Fig. 14), d. h. einem solchen, an welchem drei Flächen rechte Winkel mit einander bilden, kann die vierte Fläche beliebig gerichtet sein.

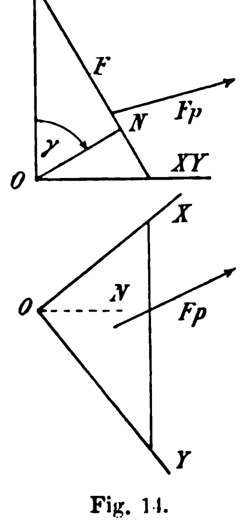
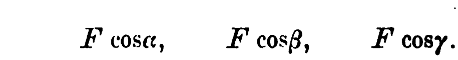


Fig. 14.

Sind α, β, γ die Winkel zwischen der Normale ON dieser Fläche und den rechtwinkligen Tetraederkanten X, Y, Z, und ist F die schiefschnittige Fläche, so sind die zu X, Y, Z normalen Flächen des Tetraeders



$$F \cos\alpha, \qquad F \cos\beta, \qquad F \cos\gamma.$$

In denselben wirken in Richtung der X-Achse die Komponenten

$$-F \cos\alpha \; \sigma_x, \qquad -F \cos\beta \; \tau_{yx}, \qquad -F \cos\gamma \; \tau_{zx},$$

welche mit der X-Komponente der in der schiefen Fläche F wirkenden Kraft Fp im Gleichgewicht sein müssen. Da das Tetraedervolum eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung ist, mit welcher die inneren Kräfte im Vergleich zu den 4 Flächenkräften verschwinden, die, wie die Flächen selbst, unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung sind, so kommen die Volumkräfte hier nicht in Betracht.

Sind λ, μ, ν die Winkel, welche p, also auch Fp mit X, Y, Z bildet,

$$Fp\cos\lambda, \qquad Fp\cos\mu, \qquad Fp\cos\nu$$

also die Komponenten nach X, Y, Z, so ergeben sich unter Mitbenutzung der Gleichungen (55) die Tetraeder-Gleichungen:

$$(56)\quad \begin{cases} p\cos\lambda = \sigma_x\cos\alpha + \tau_{xy}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma, \\ p\cos\mu = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma, \\ p\cos\nu = \tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man auch σ für die durch α, β, γ gegebene Schnittrichtung ausdrücken, wenn für ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} gegeben sind. Bildet p mit der Schnittnormale, also auch mit σ den Winkel φ (s. Fig. 12), so ist

$$(57)\qquad \sigma = p\cos\varphi$$

sowie, nach einem bekannten trigonometrischen Satz,

$$(58)\qquad \cos\varphi = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma.$$

Bildet man durch Multiplikation mit p

$$p\cos\varphi = p\cos\lambda\cos\alpha + p\cos\mu\cos\beta + p\cos\nu\cos\gamma$$

und ersetzt $p\cos\varphi$ durch σ, $p\cos\lambda$, $p\cos\mu$, $p\cos\varphi$, aber durch die Ausdrücke der Gleichungen (56), so folgt

$$\begin{aligned} \sigma = &(\sigma_x\cos\alpha + \tau_{xy}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma)\cos\alpha \\ &+ (\tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma)\cos\beta \\ &+ (\tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma)\cos\gamma \end{aligned}$$

oder, ausmultipliziert und geordnet,

$$(59)\quad \begin{aligned} \sigma = &\sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma \\ &+ 2(\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \tau_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + \tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta), \end{aligned}$$

eine Gleichung, deren Ähnlichkeit mit Gleichung (11) hervorzuheben ist.

Berechnung der Hauptspannungen aus rechtschnittigen Spannungskomponenten.

§ 26. Die Gleichungen (56) behalten ihre Gültigkeit auch für den besonderen Fall, dass die schiefschnittige Spannung die Richtung der Flächennormale hat, also

$$\lambda = \alpha, \qquad \mu = \beta, \qquad \nu = \gamma$$

ist, welche Beziehung wie schon aus § 22 hervorgeht nur für die Hauptspannungen gilt. Die Gleichungen (56) nehmen daher für Hauptspannungen, wenn diese mit σ_h bezeichnet werden, die Form an

$$(60) \quad \begin{cases} (\sigma_x - \sigma_h) \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma = 0\,, \\ \tau_{xy} \cos\alpha + (\sigma_y - \sigma_h) \cos\beta + \tau_{yz} \cos\gamma = 0\,, \\ \tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + (\sigma_z - \sigma_h) \cos\gamma = 0\,. \end{cases}$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $(\sigma_y - \sigma_h)$, die zweite mit τ_{xy} und subtrahiert die eine von der anderen, so erhält man

$$(61) \qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{\tau_{zx}(\sigma_y - \sigma_h) - \tau_{yz}\,\tau_{xy}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_y - \sigma_h)(\sigma_x - \sigma_h)}\,.$$

Multipliziert man dagegen die erste Gleichung mit τ_{xy}, die zweite mit $(\sigma_x - \sigma_h)$ und subtrahiert, so erhält man

$$(62) \qquad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_h) - \tau_{zx}\,\tau_{xy}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_y - \sigma_h)(\sigma_x - \sigma_h)}\,.$$

Setzt man die für $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$ und $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ hiermit gewonnenen Ausdrücke in der dritten der Gleichungen (60) nach Division derselben mit $\cos\gamma$ ein, so folgt

$$(63) \quad \tau_{zx} \frac{\tau_{zx}(\sigma_y - \sigma_h) - \tau_{yz}\,\tau_{xy}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_y - \sigma_h)(\sigma_x - \sigma_h)} + \tau_{yz} \frac{\tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_h) - \tau_{zx}\,\tau_{xy}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_y - \sigma_h)(\sigma_x - \sigma_h)} + \sigma_z - \sigma_h = 0,$$

eine für σ_h kubische Gleichung, welche, nach Potenzen von σ_h geordnet, lautet

$$(64) \quad \left.\begin{aligned} &\sigma_h^3 \\ &- (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,\sigma_h^2 \\ &+ (\sigma_y\,\sigma_z + \sigma_z\,\sigma_x + \sigma_x\,\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2)\,\sigma_h \\ &- \sigma_x\,\sigma_y\,\sigma_z + \sigma_x\,\tau_{yz}^2 + \sigma_y\,\tau_{zx}^2 + \sigma_z\,\tau_{xy}^2 - 2\,\tau_{yz}\,\tau_{zx}\,\tau_{xy} \end{aligned}\right\} = 0$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind die gesuchten Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3.

Führt man für die rechten Seiten der Gleichungen (61) und (62) die Abkürzungen M und N ein, so ergeben sich, je nachdem

$$\sigma_h = \sigma_1 \quad \text{oder} \quad \sigma_2 \quad \text{oder} \quad \sigma_3$$

, die verschiedenen Werte

$$M = M_1 \quad \text{oder} \quad M_2 \quad \text{oder} \quad M_3$$
$$N = N_1 \quad \text{,,} \quad N_2 \quad \text{,,} \quad N_3 .$$

ıd sodann z. B. α_1, β_1, γ_1 die Stellwinkel der Richtung σ_1, so wird

5) $$\cos\alpha_1 = M_1 \cos\gamma_1 , \qquad \cos\beta_1 = N_1 \cos\gamma_1 ,$$

d im Hinblick auf Gleichung (12)

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$

ıdet sich sodann

6) $$\cos\gamma_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + M_1{}^2 + N_1^2}} .$$

as Vorzeichen kann dabei beliebig angenommen werden. Aus den Gleichngen (65) ergeben sich $\cos\alpha_1$ und $\cos\beta_1$. In entsprechender Weise findet ıan die Stellwinkel α_2, β_2, γ_2 und α_3, β_3, γ_3 der Hauptspannungen $_2$ und σ_3.

Die Hauptspannungsgleichung wird einfacher, wenn eine oder zwei lauptspannungen Null sind. Sie geht dann über in eine Gleichung zweiten der ersten Grades.

Der erste Fall, d. h. der zweiachsige Spannungszustand tritt ein, venn das absolute Glied verschwindet, also

67) $$-\sigma_x \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \tau_{yz}{}^2 + \sigma_y \tau_{zx}{}^2 + \sigma_z \tau_{xy}{}^2 - 2\, \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} = 0$$ [1]

st, der zweite, der einachsige Spannungszustand, wenn ausserdem

68) $$\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yz}{}^2 - \tau_{zx}{}^2 - \tau_{xy}{}^2 = 0$$

st.

Für den zweiachsigen Spannungszustand erhält man sonach

69) $$\sigma_h{}^2 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\, \sigma_h + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yz}{}^2 - \tau_{zx}{}^2 - \tau_{xy}{}^2 = 0 ,$$

---

1) Diesen Fall, welcher dadurch herbeigeführt werden kann, dass

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

st, hat Saint-Venant in seiner berühmten Arbeit: De la torsion des prismes vec considérations sur leur flexion. Mémoire des Savants Etrangers. 14, p. 233 1855) in grosser Allgemeinheit untersucht. Man bezeichnet ihn daher als das Saint-Venantsche Problem. Eingehend behandelt diese Aufgabe sodann Clebsch Theorie der Elastizität fester Körper), sowie anschliessend an Clebsch Grashof Theorie der Elastizität und Festigkeit, S. 217).

für den einachsigen

$$(70)\qquad \sigma_h - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

Die letzte Gleichung zeigt unmittelbar die interessante Eigenschaft, dass die einachsige Hauptspannung so gross ist, wie die Normalspannungen für drei ganz beliebige zu einander rechtwinklige Schnittflächen. Diese Eigenschaft ist aber nur ein Sonderfall einer allgemeinen Eigenschaft, die sich daraus ergibt, dass Gleichung (64) als eine Gleichung dritten Grades geschrieben werden kann

$$(\sigma_h - \sigma_1)(\sigma_h - \sigma_2)(\sigma_h - \sigma_3) = 0$$

oder

$$(71)\qquad \sigma_h^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\,\sigma_h^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\,\sigma_h - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0,$$

und dass der Faktor von σ_h^2 in dieser Gleichung gleich sein muss demjenigen in Gleichung (64), d. h.

$$(72)\qquad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Während die Hauptspannungen für jeden Punkt eines belasteten Körpers nach Grösse und Richtung bestimmt sind, hängen σ_x, σ_y, σ_z von der zufälligen Lage des Koordinatensystems ab. Wie dasselbe aber auch gewählt wird, immer ist die Summe der drei σ für rechtwinklige Flächen gleich $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, also konstant. Man beachte die Analogie mit Gleichung (7).

Ermittelung der Hauptschubspannungen aus den Hauptspannungen.[1]

§ 27. Während mit den Hauptspannungen zugleich die grösste und kleinste aller vorkommenden Normalspannungen gegeben ist, bedarf es einer besonderen Untersuchung, die Grenzen zu bestimmen, zwischen denen die Tangentialspannungen liegen.

Zu diesem Zweck unterwerfen wir zunächst die Ausdrücke für p, σ, τ bezogen auf Hauptachsen einer Umformung, bei welcher die Z-Achse als Polachse die XY-Ebene als Äquatorebene aufgefasst, sonach die durch die Z-Achse und eine Schnittflächen-Normale bestimmte Ebene als Z-Meridian bezeichnet wird. Ist φ der Äquatorwinkel, welchen der Meridian mit der

1) Vergl. F. Wittenbauer, Theorie der Schubspannungen u. s. w. Analen der Physik und Chemie, Neue Folge. Bd. 57, 1896, S. 567.

Y-Achse einschliesst (siehe Fig. 15), so genügt dieser, der geographischen Länge entsprechende Winkel φ und der dem Komplement der Breite entsprechende Winkel γ zur Lagenbestimmung der Normale ON. Nach bekannten Sätzen der sphärischen Trigonometrie ist

73) $$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varphi\,, \qquad \cos\beta = \sin\gamma\sin\varphi\,.$$

Mit diesen Beziehungen erhält man aus den Gleichungen (50) und (51)

74) $$p^2 = \sigma_3{}^2 + [\sigma_1{}^2 - \sigma_3{}^2 + (\sigma_2{}^2 - \sigma_1{}^2)\sin^2\varphi]\sin^2\gamma\,,$$

75) $$\sigma = \sigma_3 + [\sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_2 - \sigma_1)\sin^2\varphi]\sin^2\gamma\,,$$

oder, wenn zur Abkürzung gesetzt wird

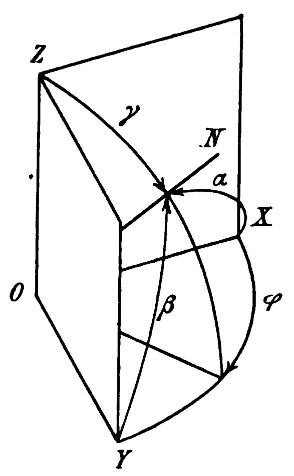


Fig. 15.

76) $$[\sigma_1{}^2 - \sigma_3{}^2 + (\sigma_2{}^2 - \sigma_1{}^2)\sin^2\varphi] = m\,,$$

77) $$[\sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_2 - \sigma_1)\sin^2\varphi] = n\,,$$

die einfacheren Gleichungen

(78) $$p^2 = \sigma_3{}^2 + m\sin^2\gamma\,,$$

(79) $$\sigma = \sigma_3 + n\sin^2\gamma\,,$$

sowie nach Gleichung (52)

(80) $$\tau^2 = \sigma_3{}^2 + m\sin^2\gamma - (\sigma_3 + n\sin^2\gamma)^2\,.$$

Die von φ abhängigen Grössen m und n haben für jeden Meridian einen bestimmten Wert und zwar, sofern $\sin^2\varphi = \sin^2(-\varphi)$ ist, für symmetrisch zur X-Achse gelegene Meridiane denselben Wert. Daher wird auch ein Polardiagramm τ/γ symmetrisch zur XY-Ebene, ausserdem aber mit Rücksicht auf die Eigenschaften von $\sin^2\gamma$ symmetrisch gegen die Z-Achse.

Bildliche Darstellung der Schubspannungen.

Fig. 16 zeigt ein solches Meridiandiagramm für $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 3$ § 28. und $\varphi = 45^0$. Wie ersichtlich ist für $\gamma = 0$, d. h. für die Z-Achse $\tau = 0$. Für $\gamma = 90^0$ erhält man

(81) $$\tau = \sqrt{m - 2\,\sigma_3\,n - n^2}$$

als den in der XY-Ebene liegenden Radiusvektor des Meridiandiagrammes, in dessen Endpunkt die XY-Ebene durch die Kurve τ/γ normal geschnitten wird. Setzt man den aus Gleichung (76) folgenden Differenzialquotienten $\frac{d\tau}{d\gamma} = 0$, so erhält man

$$(82) \qquad (m - 2\,\sigma_3\,n - 2\,n^2 \sin^2\gamma)\sin\gamma\cos\gamma = 0$$

als Bedingung für Meridianpunkte, in denen τ einen grössten oder kleinsten Wert annimmt. Ausser den schon besprochenen Werten $\gamma = 0$ und $\gamma = 90^0$,

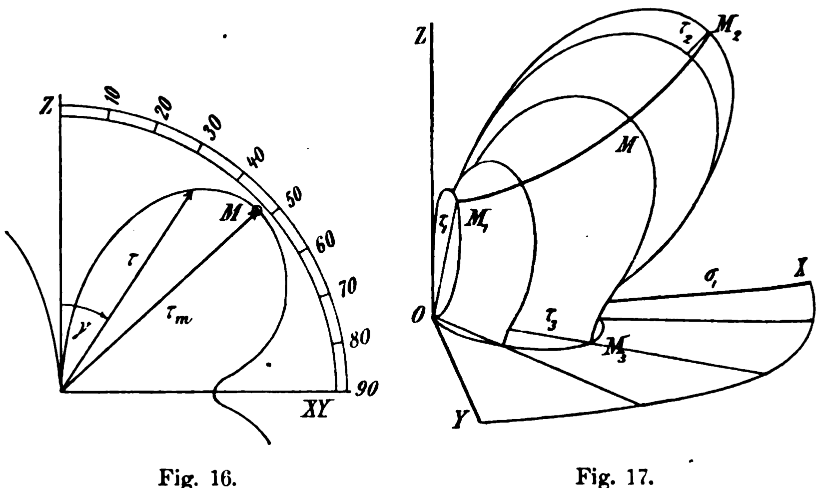


Fig. 16. Fig. 17.

die sich für $\sin\gamma = 0$ und $\cos\gamma = 0$ ergeben, erhält man nach Gleichung (80) für den aus der Gleichung

$$(83) \qquad \sin^2\gamma = \frac{m - 2\,\sigma_3\,n}{2\,n^2}$$

hervorgehenden Wert von γ die grösste Tangentialspannung des Z-Meridians

$$(84) \qquad \tau_m = + \left(\sigma_3 - \frac{m}{2\,n}\right),$$

d. h. das Meridianmaximum von τ.

Bestimmt man dies Meridianmaximum τ_m für alle möglichen Z-Meridiane, indem man φ von 0—360° wachsen lässt, so beschreibt der Endpunkt von τ_m eine geschlossene Raumkurve, von welcher Fig. 17 einen Quadranten $M_1 M_2$ darstellt. Diese Kurve schneidet

die XZ-Ebene mit $\gamma = + 45^0$, $\tau_m = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$,

die YZ-Ebene mit $\gamma = + 45^0$, $\tau_m = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2)$

und ergibt für $\frac{d\tau_m}{d\varphi} = 0$ mit Rücksicht auf die Gleichungen (76) und (77) die Bedingungsgleichung

$$(85) \qquad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{[\sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_2 - \sigma_1)\sin^2\varphi]^2}\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

lche nur durch sin $\varphi = 0$ oder cos $\varphi = 0$, d. h. für $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^0$ üllt wird. Eine Ausnahme bildet der Fall, dass die Hauptspannungen r besonderen Bedingung

$$\sigma_2 = \sigma_3$$

nügen. In diesem Falle wird das Meri- unmaximum τ_m nach den Gleichungen (76) 7) (84)

$$\tau_m = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \tag{86}$$

nd zwar nach Gleichung (83) bei

$$\sin\gamma = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}. \tag{87}$$

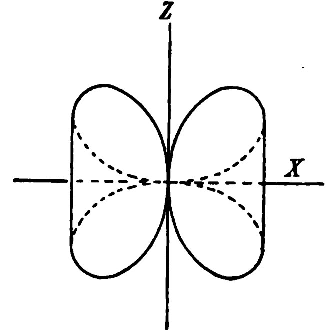


Fig. 18.

)a aber nach Gleichung (73) $\sin\gamma \cos\varphi = \cos\alpha$, so kann für Gleichung 87) auch geschrieben werden

$$\cos\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ oder } \alpha = \pm 45^0.$$

Die Endpunkte von τ_m liegen hiernach auf einem Kreis um die X- chse; überhaupt ist in diesem Falle das ganze Polardiagramm für τ eine otationsfläche um X, deren Form durch Fig. 18 veranschaulicht wird.

Die Hauptschubspannungen.

§ 29.

Offenbar ist der aus Gleichung (86) hervorgehende Wert von τ_m zu- leich der grösste Wert von τ in dem ganzen Polardiagramm, also in dem aateriellen Punkte überhaupt. Auch unter Einschluss des Sonderfalles, ass zwei Hauptspannungen einander gleich sind, hat man sonach Max τ nter den Werten

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{88}$$

u suchen, von denen τ_1 normal zu X, τ_2 normal zu Y, τ_3 normal zu Z erichtet ist. Diese ausgezeichneten Werte nennt man nach Winkler Iauptschubspannungen.

Das Hauptergebnis der vorstehenden Untersuchung lautet: Die grösste n einem Punkte stattfindende Schubspannung ist halb so gross

wie die algebraische, d. h. unter Berücksichtigung des Vorzeichens gebildete Differenz aus der grössten und kleinsten der in dem Punkte herrschenden Hauptspannungen.

Das Hauptspannungsnetz.

§ 30. Für zwei Nachbarpunkte im Innern eines belasteten Körpers können die drei Hauptspannungen gleiche oder etwas verschiedene Richtung haben. Bei unendlich kleiner Entfernung der Punkte wird aber auch die Verschiedenheit nur unendlich klein sein können. Bewegt man daher einen mathematischen Punkt, von einem materiellen Punkt P ausgehend, auf einer seiner Hauptspannungsrichtungen, z. B. derjenigen von σ_1, um die Wegstrecke ds, so erreicht er einen zweiten materiellen Punkt Q, in welchem die Hauptspannungsrichtung sich etwas geändert hat. Verfolgt man nun diese neue Richtung, und fährt so fort, indem man immer die örtliche Richtung der Hauptspannung als Kompass benutzt, so beschreibt der mathematische Punkt eine Kurve in dem Körper, welche durch den Anfangspunkt und den Spannungszustand vollständig bestimmt ist, und welche überall durch ihre Tangente die Richtung einer Hauptspannung darstellt. Da man, von P ausgehend, ebenso gut die Richtungen von σ_2 oder σ_3 hätte verfolgen können, so gehen offenbar durch P, wie überhaupt durch jeden materiellen Punkt des Körpers, drei solche Kurven. Man nennt diese Kurven **Spannungstrajektorien**, auch wohl **Kraftlinien** in Anlehnung an die bekannten magnetischen Kraftlinien. Die Gesamtheit dieser Linien für einen in bestimmter Weise belasteten Körper möge sein **Hauptspannungsnetz** oder kurz **Netz**[1]) heissen. Dann können die Linien auch Netzlinien und die Flächen, deren Elemente je zwei Hauptspannungen σ_1 und σ_2 oder σ_2 und σ_3 oder σ_3 und σ_1 enthalten, Netzflächen[2]) genannt werden.

Wenn in § 15 die Vorstellung eines dreiachsigen Spannungszustandes durch das Bild dreier sich rechtwinklig schneidenden Fadenbündel vermittelt wurde, so zeigt sich jetzt, dass die Netzlinien diesen Fäden entsprechen, dass jedoch die Fäden beim Übergang von dem Körperelement zu einem endlichen Körper im allgemeinen nicht mehr als gerade Linien, sondern als Kurven gedacht werden müssen.

Durch die drei Scharen von Netzflächen, die man sich in endlichen oder

1) In Anlehnung an das geographische Gradnetz.

2) Lamé nennt diese Fläche: „Surfaces isostatiques“. Leçons sur la théorie mathematique de l'élasticité des corps solides, Paris, 1852, S. 222.

ıendlich kleinen Abständen denken kann, zerfällt der Körper in Elemente, ın denen man eine richtige Vorstellung durch das Bild eines Wölbsteines :winnt.

Für das Gleichgewicht eines Netzelementes ergeben sich analog zu den leichungen (54) einfache Bedingungen, welche bereits Lamé aufgestellt hat.

Die Laméschen Netzgleichungen.

§ 31. Das schraffierte Feld in Fig. 19 bedeute eine durch X-schnittige Ebe-ın, die O-Ebene und die P-Ebene, begrenzte Materialschicht von der icke dx, und es werde angenommen, dass in die Netzlinien I, II, III beziehungsweise mit ., Y, Z parallel sind, während sie in P in-ılge der Krümmung eine unendlich wenig ver-:hiedene Richtung haben. Hierdurch ergeben ch in der P-Ebene Schubspannungen nach ' und nach Z, welche in der O-Ebene nicht vor-anden sind, und die man daher als Zuwachs-rössen mit

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

u bezeichnen hat. In welcher Weise diese rössen das Gleichgewicht beeinflussen, geht be-eits aus den Cauchyschen Gleichungen (54) ıervor. Hier soll gezeigt werden, wie die par-iellen Differenzialverhältnisse von den Haupt-pannungen σ_1, σ_2, σ_3 und von der Krümmung der Netzlinien abhängen. Vir betrachten hierbei den Einfluss jeder der drei Netzlinien und ihrer Iauptspannungen zunächst unabhängig von dem der beiden anderen und ıeginnen mit I.

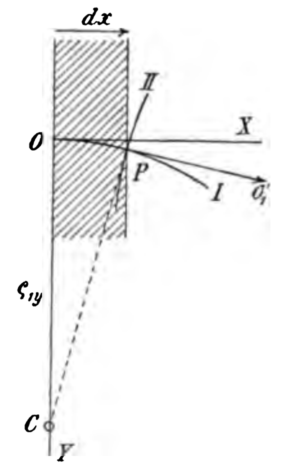


Fig. 19.

Die Netzlinie I schneidet die P-Ebene unter einem Winkel, dessen 'rojektion auf die XY-Ebene mit dem Krümmungswinkel

$$\sphericalangle\, OCP = \frac{\mathrm{d}x}{\varrho_{1y}} \tag{39}$$

bereinstimmt, unter ϱ_{1y} den Krümmungsradius OC verstanden, dessen rster Index die Kurve I und dessen zweiter Index die Richtung Y kenn-ıichnet.

Verliefe die Netzlinie I wie ihre Projektion in Fig. 19, so würde bei Benutzung von Gleichung (18) der Winkel α zwischen Hauptspannung und Schnittnormale durch $\frac{dx}{\varrho_{1y}}$ zu ersetzen sein, und, sofern dieser Winkel unendlich klein ist, wird $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = \alpha$. Bezeichnen wir ferner die Schubspannung in P durch $\frac{\partial_1 \tau_{xy}}{\partial x} dx$, so möge der Index 1 bei ∂_1 andeuten, dass es sich hier nur um den Einfluss der Hauptspannung σ_1 handelt. Führt man diese besonderen Werte in Gleichung (18) ein, so erhält man

$$\frac{\partial_1 \tau_{xy}}{\partial x} dx = \sigma_1 \frac{dx}{\varrho_{1y}}$$

oder, nach Division mit dx,

$$\frac{\partial_1 \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\sigma_1}{\varrho_{1y}} . \tag{90}$$

Da die Kurve OP eine Raumkurve ist, also im allgemeinen nicht in der XY-Ebene liegt, so wird sie sich auch in der XZ-Ebene als Kurve projizieren, deren Krümmungsradius mit ϱ_{1z} zu bezeichnen ist, so dass $\frac{dx}{\varrho_{1z}}$ den Winkel ausdrückt, welchen in dieser Projektion die Kurventangente in P mit X bildet.

Hiernach erhält man die mit (90) analog gebildete Gleichung

$$\frac{\partial_1 \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\sigma_1}{\varrho_{1z}} . \tag{91}$$

Die Netzlinie I wird in P durch die Netzlinie II rechtwinklig geschnitten, in welcher die Spannung σ_2 herrscht. Da, wie angenommen, die XY-Ebene die Netzfläche $I\,II$ in O berührt, so darf der in der Projektion erscheinende Winkel OCP als der wahre Winkel, unter welchem die Linie II die rechte Wandfläche schneidet, angesehen werden.

Da man aus der Richtung $+X$ in die Richtung PII gelangt, indem man zunächst um OCP nach rechts, dann um $\frac{\pi}{2}$ nach links dreht, so erhält man hier für den Winkel α in Gleichung (17) $\alpha = OCP - \frac{\pi}{2}$ und, da OCP unendlich klein ist,

$$\cos\left(OCP - \frac{\pi}{2}\right) = \sin OCP = \frac{dx}{\varrho_{1y}} ,$$

$$\sin\left(OCP - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos OCP = -1 ,$$

und damit nach (18)

$$\frac{\partial_2 \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\sigma_2}{\varrho_{1y}}. \tag{92}$$

Ganz analog erhält man von der durch P gehenden Netzlinie III, welche in Fig. 19 nicht dargestellt ist,

$$\frac{\partial_3 \tau_{xz}}{\partial x} = -\frac{\sigma_3}{\varrho_{1z}}. \tag{93}$$

Setzt man nun

$$\left\{\begin{aligned} \partial_1 \tau_{xy} + \partial_2 \tau_{xy} &= \partial \tau_{xy}, \\ \partial_1 \tau_{xz} + \partial_3 \tau_{xz} &= \partial \tau_{xz}, \end{aligned}\right. \tag{94}$$

so erhält man aus den Gleichungen (90) und (92), bezw. aus den Gleichungen (91) und (93)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_{1y}}, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varrho_{1z}}. \tag{95}$$

Bildet man weiter die analogen Ausdrücke

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varrho_{2z}}, \qquad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varrho_{2x}}, \tag{96}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\varrho_{3x}}, \qquad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\varrho_{3y}}, \tag{97}$$

so sind alle in den Cauchyschen Gleichungen (54) vorkommenden Differenzialverhältnisse von Schubspannungen durch die Hauptspannungen und die Krümmungsradien der Netzlinien ausgedrückt.

Was die in jenen Gleichungen vorkommenden Differenzialverhältnisse von **Normalspannungen** anlangt, so ist leicht einzusehen, dass mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung gesetzt werden kann:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_3}{\partial z}. \tag{98}$$

Wäre z. B. σ_1 in P so gross wie in O, also $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = 0$, so würde nach Gleichung (17) in P

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 OCP$$

also

$$\frac{\partial_1 \sigma_x}{\partial x} dx = \sigma_1 - \sigma_1 \cos^2 OCP = \sigma_1 \sin^2 OCP \cdot$$

Da aber $\sin^2 OCP$ eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, so muss hiernach $\frac{\partial_1 \sigma_x}{\partial x}$ eine solche erster Ordnung sein, so dass es gegenüber $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}$ verschwindet, wenn dieses Verhältnis nicht Null ist.

Setzt man nun die Ausdrücke der Gleichungen (95) bis (98) in den Gleichungen (54) ein, so erhält man die Laméschen Gleichungen

$$
(99) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\rho_{2x}} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\rho_{3x}} + k_x = \frac{\gamma}{g} \varphi_x, \\
&\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\rho_{3y}} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_{1y}} + k_y = \frac{\gamma}{g} \varphi_y, \\
&\frac{\partial \sigma_3}{\partial z} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\rho_{1z}} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\rho_{2z}} + k_z = \frac{\gamma}{g} \varphi_z.
\end{aligned}
\right.
$$

Bezüglich des Vorzeichens der ρ ist zu bemerken, dass es positiv oder negativ ist, je nachdem die Bewegungs-Richtung vom Element zum Krümmungsmittelpunkt der positiven oder negativen Richtung der Achsen X, Y, Z entspricht.

Die Gleichungen (95) können auch unmittelbar für das Netzelement, also ohne Benutzung der Cauchyschen Gleichungen entwickelt werden. So erhält man für den in Fig. 20 dargestellten einfachen Fall, bei welchem $\rho_{3x} = \infty$ ist, und für $k_x = 0$ und $\varphi_x = 0$ nach den in der Figur eingeschriebenen Ausdrücken, welche in der Z-Richtung die Breite 1 des Elements voraussetzen, als Gleichgewichtsbedingung für die Richtung X

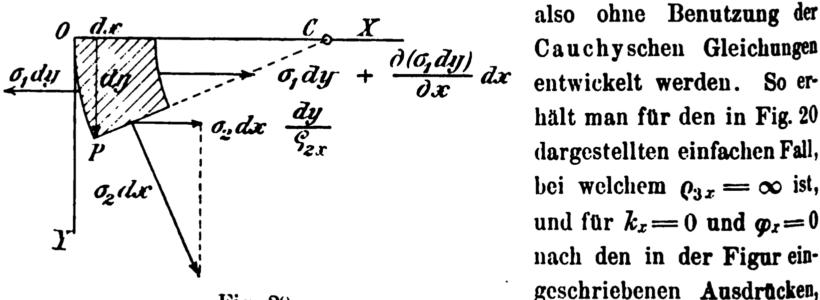


Fig. 20.

$$\frac{\partial (\sigma_1 \, dy)}{\partial x} dx + \sigma_2 \, dx \frac{dy}{\rho_{2x}} = 0,$$

oder

$$\sigma_1 \frac{\partial (dy)}{\partial x} + dy \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \sigma_2 \frac{dy}{\rho_{2x}} = 0.$$

Da nach Fig. 20

$$\sphericalangle OCP = \frac{\partial (dy)}{\partial x} = - \frac{dy}{\rho_{2x}},$$

so folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$-\sigma_1 \frac{dy}{\varrho_{2x}} + dy \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \sigma_2 \frac{dy}{\varrho_{2x}} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varrho_{2x}} = 0,$$

was unter den gemachten Annahmen für ϱ_{3x}, k_x, φ_x auch aus der ersten der Laméschen Gleichungen (99) folgt.

Der Spannungszustand an der freien Oberfläche eines Körpers.

§ 32. Wird die Normale in einem Oberflächenelement als Z-Achse genommen, so sind die Spannungskomponenten σ_z, τ_{zx}, τ_{zy} daselbst durch den Nachbarkörper bedingt. Besteht dieser aus Luft, so ist $\sigma_z = -1$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$. Die Spannung $\sigma_z = -1$ ist aber im Vergleich mit den üblichen Anstrengungen der Baustoffe ein vernachlässigbarer Wert, so dass auch $\sigma_z = 0$ gesetzt werden kann.

Aus den Gleichungen (55) folgt dann unmittelbar auch

$$\tau_{xz} = 0 \text{ und } \tau_{yz} = 0.$$

Sonach ist Gleichung (67) erfüllt, und es ergibt sich das wichtige Resultat: **In jeder freien Oberfläche herrscht höchstens zweiachsige Spannung.**

Ist σ_3 die verschwindende Hauptspannung, so ist diese normal zur Oberfläche. **Die Hauptspannungsachsen σ_1 und σ_2 liegen daher in der Oberfläche selbst.**

Dieser Satz lässt sich erweitern für den technisch wichtigen Fall, dass die Oberfläche an eine reibungslose Flüssigkeit von bekanntem Druck grenzt, der Körper also eine Gefässwand bildet. Der normal zur Oberfläche wirkende Druck stellt hier $-\sigma_3$ dar, σ_1 und σ_2 liegen in der Oberfläche. Diese selbst ist also eine Netzfläche. Die Richtung von σ_1 und σ_2 kann dabei in vielen Fällen aus Symmetrieeigenschaften abgeleitet werden, wie an einigen Beispielen gezeigt werden mag.

Cylindrischer Körper von einfach symmetrischem Querschnitt bei symmetrischer Belastung.

§ 33. Wie Fig. 21 andeutet, sei XZ die Symmetrieebene eines Körpers. Unter symmetrischer Belastung werde verstanden, dass die Kräfte in symmetrischen Oberflächenteilen ebenfalls symmetrisch sind. Man muss annehmen, dass in diesem Falle auch das Netz symmetrisch zu XZ sein wird. Die XZ-Ebene wird daher selbst eine Netzfläche sein, während die Netzlinien III etwa den in Fig. 21 eingezeichneten Verlauf haben müssen.

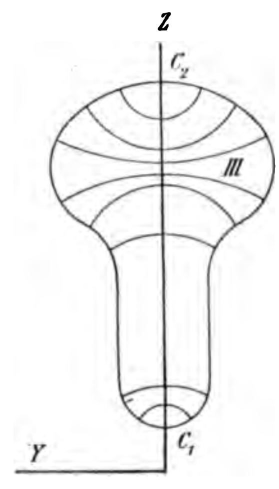


Fig. 21.

Für die Punkte C_1 und C_2, in denen σ_1 nach X, σ_2 nach Y, σ_3 zur Oberfläche normal, also nach Z, gerichtet sein muss, ist damit für alle drei Hauptspannungen die Richtung gegeben.

Der zweiachsig symmetrische Querschnitt bei Torsion.

§ 34. Ein solcher Querschnitt ist z. B. der in Fig. 22 dargestellte. Man sieht leicht ein, dass bei Torsion um die dritte Achse die im Querschnitt liegenden Hauptspannungskurven III diametral-symmetrisch sein, also durch den Mittelpunkt A gehen müssen (vergl. § 76). Ist BAC eine von diesen Kurven, gesehen auf die Schnittfläche des einen der beiden Stabteile, in die der Stab durch den Schnitt zerfällt, so zeigt sich dieselbe Kurve an dem andern Stabteil als Spiegelbild, d. h. in der Form $B'AC'$. Hieraus ergibt sich leicht, dass die Symmetrieachsen des Querschnitts selbst Hauptspannungskurven III sind.

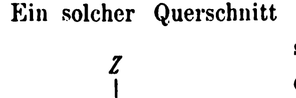
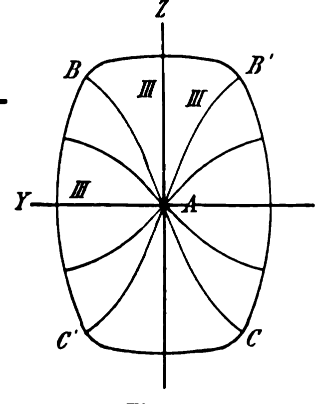



Fig. 22.

Da beim Kreis jeder Durchmesser Symmetrieachse ist, so ist er hiernach zugleich Hauptspannungskurve.

Die Netzflächen I II sind sowohl für Fig. 21 wie für Fig. 22 Cy-

linderflächen, welche von den Linien *III* normal geschnitten werden. Die Linien *I* und *II* liegen im allgemeinen nich tin den Querschnitten, sondern schneiden dieselben schiefwinklig.

Der Rotationskörper bei polar-symmetrischer Belastung.

§ 35. Wird ein Rotationskörper so belastet, dass sich keiner seiner Meridiane von anderen hinsichtlich seiner Lage gegenüber den äusseren Kräften unterscheidet, so heisse die Belastung polar-symmetrisch. Als Beispiel diene die in Fig. 23 dargestellte Kugel, welche zwischen ebenen parallelen Platten gedrückt wird.

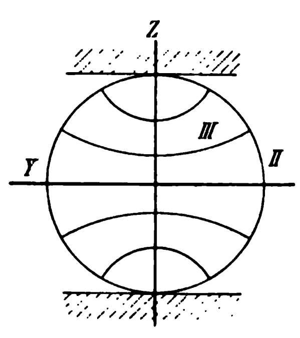


Fig. 23.

Bei einem solchen Zustand muss angenommen werden, dass für alle Meridianebenen in gleichliegenden Punkten derselbe Spannungszustand stattfindet. Von den Hauptspannungen liegen immer je zwei in der Meridianebene, während die dritte die Richtung der Parallelkreis-Tangente hat. Von den ersten beiden Hauptspannungen weiss man, dass in den Randpunkten die eine, σ_3, normal, die andere, σ_2, parallel zur Oberfläche gerichtet ist. Durch diese Bedingungen ist das Hauptspannungsnetz in vielen Fällen ziemlich genau bestimmt. Die Netzlinien zerfallen hier in drei Gruppen, die man als Ringlinien, Meridianlinien und Radiallinien unterscheiden kann. Dementsprechend nennt man die Hauptspannungen Ring-, Meridian- und Radialspannungen.

Die polar-symmetrische Belastung wird besonders bei Gefässen für Flüssigkeiten oder Gase eintreten können. Je geringer die Wanddicke ist, um so weniger besteht ein Zweifel über die Form der Netzlinien, also über die Richtung der Hauptspannungen. Die Berechnung der Grösse der Hauptspannungen wird hierdurch sehr erleichtert.

III. Abschnitt.

Der Zusammenhang zwischen dem geometrischen und dem mechanischen Zustand eines elastischen Elements.

Das Hookesche und das Poissonsche Gesetz.

§ 36. Bei dem einachsigen Spannungszustand, z. B. beim Spannen eines Drahtes ist die Spannkraft der Dehnung innerhalb gewisser Grenzen proportional. Wenn also z. B. σ_1 die Spannung im Drahtquerschnitt, ε_1 die Dehnung ist, so besteht die Beziehung

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 , \tag{101}$$

unter E einen vom Material abhängigen konstanten Faktor, den Elastizitätsmodul [1]) verstanden, dessen Einheit die von σ_1 ist. Man nennt diese Beziehung das Hookesche Gesetz.[2])

Von diesem Gesetz weiter schliessend, liegt die Vermutung nahe, dass auch für den zwei- und dreiachsigen Spannungszustand eine ähnliche Proportionalität besteht. Das ist jedoch nicht allgemein der Fall.

Zunächst ist schon für den einachsigen Spannungszustand σ_1, bei welchem $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ ist, nicht auch $\varepsilon_2 = 0$ und $\varepsilon_3 = 0$, sondern es findet in jeder zu ε_1 normalen Richtung eine negative Dehnung (Kontraktion) statt, welche zu ε_1 in bestimmtem Verhältnis steht.

Setzt man

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{m} = -\frac{\sigma_1}{mE} , \tag{102}$$

1) Clebsch bezeichnete $\frac{1}{E}$ mit α, ebenso v. Bach; α ist jedoch weniger charakteristisch, kann auch als Winkelzeichen kaum entbehrt werden. Jedenfalls ist E gebräuchlicher.

2) Der englische Physiker Hooke veröffentlichte das Gesetz 1679 in den Philosophical tracts and collections in der Form: „ut tensio sic vis."

o ist für **isotrope** [1]) oder nach allen Richtungen gleichgefüge Körper m ine zwischen $m = 2$ und $m = 4$ liegende zweite Elastizitätskonstante, die 'oissonsche **Zahl**, welche für Metalle in der Regel zu

$$m = 3\tfrac{1}{3} \tag{103}$$

ngenommen werden kann.

Die Poissonschen Gleichungen.

§ 37.

Für isotropes Material gilt Gleichung (102) mit entsprechender Index-ertauschung, auch wenn σ_2 oder σ_3 allein wirken. Unterwirft man da-er ein elastisches Element der Reihe nach den einachsigen Spannungen $_1'$, σ_2'', σ_3''', so ergeben sich jeweils die Dehnungen:

$$\begin{array}{llll}
\text{urch } \sigma_1' : & \varepsilon_1' = \dfrac{\sigma_1}{E}, & \varepsilon_2' = -\dfrac{\sigma_1}{mE}, & \varepsilon_3' = -\dfrac{\sigma_1}{mE}, \\
\text{,,} \ \sigma_2'' : & \varepsilon_1'' = -\dfrac{\sigma_2}{mE}, & \varepsilon_2'' = \dfrac{\sigma_2}{E}, & \varepsilon_3'' = -\dfrac{\sigma_2}{mE}, \\
\text{,,} \ \sigma_3''' : & \varepsilon_1''' = -\dfrac{\sigma_3}{mE}, & \varepsilon_2''' = -\dfrac{\sigma_3}{mE}, & \varepsilon_3''' = -\dfrac{\sigma_3}{E}.
\end{array}$$

o lange die Dehnungen hinreichend klein bleiben, sind sie unabhängig avon, ob schon eine andere Dehnung von gleicher Richtung vorhanden war, . h. sie addieren sich zu jener. Versetzt man daher das Element zu-ächst durch σ_1' in den einachsigen und dann durch Hinzufügen von σ_2'' nd σ_3''' in den dreiachsigen Spannungszustand, so erhält man z. B.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''',$$

nd danach ergeben sich für den Spannungszustand $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die Glei-ungen:

$$\left\{\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right), \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}\right), \\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}\right),
\end{aligned}\right. \tag{04}$$

1) Über das Verhalten nicht isotroper Körper s. Grashof, Theorie der ıstizität und Festigkeit S. 21. Die Zahl der Elastizitätskonstanten wird hier ısser; hierdurch werden die Beziehungen so verwickelt, dass eine Verwendung technische Aufgaben kaum möglich ist, wennschon, wie bei gezogenen und valzten Stäben oder bei Holz, der isotrope Zustand keineswegs immer vorliegt.

welche man Poisson verdankt. Nach diesen Gleichungen kann man, wenn die Hauptspannungen bekannt sind, zunächst die Hauptdehnungen berechnen, aus denen sich dann weiter nach Gleichung (14) die Dehnung nach beliebiger durch die Winkel α, β, γ gegebener Richtung zu

$$(105) \quad \varepsilon = \frac{1}{E}\left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right)\cos^2\alpha + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}\right)\cos^2\beta + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}\right)\cos^2\gamma\right],$$

ergibt, welche Gleichung sich für den ein- und zweiachsigen Spannungszustand entsprechend vereinfacht.

Ist ε für eine, zwei oder drei Richtungen den Hauptachsen gegenüber gegeben, je nachdem der Spannungszustand ein-, zwei-, oder dreiachsig ist, so kann man die Hauptspannungen aus einer entsprechenden Anzahl nach (105) gebildeter Gleichungen berechnen.

Ein wichtiger Sonderfall ist es, wenn die in Richtung der Hauptspannungen stattfindenden Dehnungen ε_1, ε_2, ε_3 gegeben sind. Hier kann man die Gleichungen (104) zur Berechnung von σ_1, σ_2, σ_3 benutzen. Durch Addition erhält man zunächst

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

oder, nach Gleichung (7),

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{m}{m-2} E e .$$

Aus dieser und je einer der Gleichungen (104) folgt sodann

$$(106) \quad \left| \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{m}{m+1} E\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right), \\ \sigma_2 &= \frac{m}{m+1} E\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right), \\ \sigma_3 &= \frac{m}{m+1} E\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right). \end{aligned} \right.$$

Zusammenhang zwischen σ und ε für dieselbe Richtung, welche nicht die einer Hauptachse ist.

§ 38. Nach (51) ist die Normalspannung σ in einer beliebigen durch α, β, γ gegebenen Fläche, durch σ_1, σ_2, σ_3 ausgedrückt:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma .$$

tzt man hier für σ_1, σ_2, σ_3 die Werte aus (106), so erhält man

$$= \frac{m}{m+1} E\left[\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma + \frac{e}{m-2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\right],$$

er, mit Rücksicht auf (12) und (14)

$$\text{07)} \qquad \sigma = \frac{m}{m+1} E\left(\varepsilon + \frac{e}{m-2}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die in den Gleichungen (106) ausgedrückte ziehung für die Hauptspannungen und die gleich gerichteten Hauptdehnungen auch ganz allgemein für jede Normalspannung und die eichgerichtete Dehnung gilt.

Mit der Abkürzung:

$$\text{08)} \qquad \frac{m}{m+1} E = 2G$$

hreibt sich Gleichung (107) etwas einfacher:

$$\text{109)} \qquad \sigma = 2G\left(\varepsilon + \frac{e}{m-2}\right),$$

ind man erhält z. B. für drei beliebige rechtwinklige Richtungen

$$\text{(110)} \quad \left| \begin{array}{ll} \sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right), & E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}, \\ \sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2}\right), & E\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}, \\ \sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}\right), & E\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}. \end{array} \right.$$

Zusammenhang zwischen Schubspannung und Winkelverschiebung.

Für ε gilt allgemein die Gleichung (11). Führt man diese Beziehung in Gleichung (109) ein, so folgt § 39.

$$\begin{aligned} \sigma = {} & 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right)\cos^2\alpha + 2G\mu_{yz} \cos\beta \cos\gamma \\ & + 2G\left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2}\right)\cos^2\beta + 2G\mu_{zx} \cos\gamma \cos\alpha \\ & + 2G\left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}\right)\cos^2\gamma + 2G\mu_{xy} \cos\alpha \cos\beta . \end{aligned}$$

oder, im Hinblick auf die Gleichungen (110),

$$(111) \quad \sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma \\ + 2G\,(\mu_{yz} \cos\beta \cos\gamma + \mu_{zx} \cos\gamma \cos\alpha + \mu_{xy} \cos\alpha \cos\beta).$$

Nach Gleichung (59) war aber auch

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma \\ + 2\,(\tau_{yz} \cos\beta \cos\gamma + \tau_{zx} \cos\gamma \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\alpha \cos\beta).$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von (111) folgt also

$$(G\mu_{yz} - \tau_{yz})\cos\beta\cos\gamma + (G\mu_{zx} - \tau_{zx})\cos\gamma\cos\alpha + (G\mu_{xy} - \tau_{xy})\cos\alpha\cos\beta = 0,$$

welche Gleichung für beliebige Winkel α, β, γ nur erfüllt werden kann, wenn die Beziehungen bestehen:

$$(112) \qquad \tau_{yz} = G\mu_{yz}\,, \qquad \tau_{zx} = G\mu_{zx}\,, \qquad \tau_{xy} = G\mu_{xy}\,.$$

In diesen Gleichungen kommt zum Ausdruck, dass zwischen den Schubspannungen und den mit gleichem Index versehenen Winkelverschiebungen lineare Gleichungen bestehen, welche dem Hookeschen Gesetz (101) analog sind, und bei denen die in Gleichung (108) definierte Konstante G dem Elastizitätsmodul entspricht. Man nennt deshalb G Schubelastizitätsmodul, oder kürzer Gleitmodul.

Da für $\tau = 0$ nach (112) auch $\mu = 0$ wird, so ist zugleich erwiesen, dass für isotropes Material die Richtungen der Hauptspannungen mit den Richtungen der Hauptdehnungen zusammenfallen. Hervorzuheben ist, dass Gleichung (112) auf dem Hookeschen und dem Poissonschen Gesetz beruht, daher auch an deren Gültigkeitsgrenzen gebunden ist.

Allgemeines Verfahren zur Berechnung der Hauptspannungen und der Hauptdehnungen.

§ 40. Unter Benutzung der Gleichungen (10) können die Gleichungen (110) und (112) auch folgendermassen geschrieben werden

$$(113) \quad \begin{cases} \sigma_x = 2G\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{e}{m-2}\right), \\ \sigma_y = 2G\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{e}{m-2}\right), \\ \sigma_z = 2G\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} + \dfrac{e}{m-2}\right), \end{cases}$$

$$
114) \quad
\begin{cases}
\tau_{yz} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \\
\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right), \\
\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right).
\end{cases}
$$

Dabei ist nach den Gleichungen (7) und (10)

$$
(115) \qquad e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.
$$

Bildet man aus den Gleichungen (113) und (114) die partiellen Ableitungen, welche in den Cauchyschen Gleichungen (54) vorkommen, so ergeben sich drei partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit den Differenzialquotienten

$$
\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z},
$$

welche in einfachen Fällen integriert werden können, wodurch man die Deformationskoordinaten ξ, η, ζ eines materiellen Punktes als Funktion seiner Koordinaten x, y, z erhält. Nach den Gleichungen (113) bis (115) können dann die 6 rechtschnittigen Spannungskomponenten auch als Funktionen von x, y, z ausgedrückt und für jeden Punkt, dessen Spannungszustand untersucht werden soll, berechnet werden. Aus Gleichung (64) erhält man endlich die Hauptspannungen des Punktes und aus den Gleichungen 104) seine Hauptdehnungen. Diese können auch aus Gleichung (13)berechnet werden, wenn man die Werte ε_x, ε_y, ε_z, μ_{yz}, μ_{zx}, μ_{xy} nach (10) einsetzt.

Es liegt auf der Hand, dass von diesem umständlichen Verfahren für technische Aufgaben nur wenig Gebrauch gemacht werden kann. Immerhin hat es sich zur Aufklärung über mehrachsige Spannungszustände sowohl bei zusammengesetzter Beanspruchung stabförmiger wie insbesondere bei wandförmigen und gedrungenen Körpern als sehr wertvoll erwiesen.

Abweichungen vom Hookeschen Gesetz.

§ 41. Die lineare Beziehung zwischen Kraft und Formänderung, welche sich im Hookeschen Gesetz ausdrückt, ist eine Annäherung, welche das wirkliche Verhalten mit einer bei verschiedenen Substanzen sehr verschiedenen Genauigkeit wiedergibt.

Schon lange hat man daher nach einem strengeren, möglichst allgemein gültigen Gesetz gesucht, ohne ein solches zu finden. In einer histo-

rischen Zusammenstellung von diesbezüglichen Vorschlägen von Mehmke[1]) wird u. a. mitgeteilt, dass schon (1729) Bülfinger und (1822) Hodgkinson das Gesetz der allgemeinen Parabel

$$\sigma = A\varepsilon^n \tag{116}$$

empfohlen haben, auf welches neuerdings auch (1897) v. Bach und Schüle durch Versuche geführt worden sind.

Ein anderes Gesetz

$$\sigma = A\varepsilon + B\varepsilon^2 , \tag{117}$$

welches durch eine quadratische Parabel dargestellt wird, hat ebenfalls Hodgkinson (1849), später (1893) Hartig vorgeschlagen.

Durch eines dieser Gesetze der Festigkeitslehre eine allgemein gültige Basis zu geben, erscheint zur Zeit ziemlich aussichtslos. Von theoretischer Verwertung der nicht linearen Spannungsgesetze wird daher hier abgesehen in der Annahme, dass man auch bei genauerer Kenntnis des Gesetzes sich für technische Anwendungen mit Berichtigungskoeffizienten wird behelfen müssen, wie sie z. B. in der Hydraulik üblich sind.

Hiermit soll indessen keineswegs die Bedeutung von Versuchen in Frage gestellt werden, welche die genauere Erforschung der Elastizität der technisch wichtigen Stoffe bezwecken. Es sei jedoch bemerkt, dass bei solchen Versuchen nicht immer scharf genug zwischen dem Verhalten bei erstmaliger Belastung und dem Dauerzustand unterschieden worden ist, der sich nach einiger Zeit bei regelmässig wiederholtem Kräftespiel einstellt, und bei welchem die Abweichungen vom Hookeschen Gesetz meist viel geringer sind als bei der ersten Belastung. Auch auf die sogenannte elastische Nachwirkung ist hierbei Rücksicht zu nehmen, welche darin besteht, dass die Deformation nicht nur von der Grösse der Belastung, sondern auch von ihrer Dauer abhängt.

Die elastische Energie der Volumeinheit.

§ 42. Die mechanische Arbeit, welche zur elastischen Formänderung eines Körpers verwendet wird, stellt eine gewisse Energiemenge dar, die von einem anderen Körper auf den elastischen übergeht und von diesem bei der entgegengesetzten Formänderung wieder ausgegeben werden kann. Solange die Rückgabe noch nicht erfolgt ist, muss diese Energie als aufgespeichert, als Bestandteil des gesamten Energievermögens des elastischen Körpers aufgefasst werden. Bezeichnet man die bei der Energierückgabe erfolgende

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik. 42. Jahrgang, Heft 6.

Arbeitsleistung mit A, das Energievermögen vor und nachher aber mit U_1 und U_2, so ist offenbar

(118) $$U_1 - U_2 = A\,.$$

Um A auszudrücken, werde angenommen, dass in einem Würfel von 1 cm Seite überall gleicher Spannungszustand mit den rechtschnittigen Komponenten σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} herrsche, durch welche die Deformationen ε_x, ε_y, ε_z, μ_{yz}, μ_{zx}, μ_{xy} hervorgebracht sind, zwischen denen die Gleichungen (110) und (112) bestehen.

Soll nun z. B. ε_x nach und nach bis Null vermindert werden, während die andern ε und die μ sich nicht ändern, so muss, da jene Gleichungen bestehen bleiben, auch σ_x in gleichem Verhältnis abnehmen. Die Arbeit, welche der Würfel bei dieser Zusammenziehung leistet, ist daher

(119) $$A_x = \frac{\sigma_x + 0}{2} \cdot \varepsilon_x = \frac{1}{2}\,\sigma_x \varepsilon_x$$

oder nach Gleichung (110)

$$A_x = G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right)\varepsilon_x = G\left(\varepsilon_x^2 + \frac{e}{m-2}\,\varepsilon_x\right).$$

Verfährt man ebenso mit ε_y und ε_z, so erhält man entsprechende Werte A_y und A_z und als Summe aller drei Arbeiten

$$A_x + A_y + A_z = G\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e}{m-2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right],$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (7)

(120) $$A_x + A_y + A_z = G\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2}\right).$$

Löst man sodann von den noch bestehenden Verschiebungen zunächst μ_{yz} auf, so wird die Arbeit

(121) $$A_{yz} = \frac{\tau_{yz} + 0}{2}\,\mu_{yz} = \frac{1}{2}\,\tau_{yz}\,\mu_{yz}$$

geleistet, sonach mit Rücksicht auf Gleichung (112) bei Auflösung sämtlicher Verschiebungen

(122) $$A_{yz} + A_{zx} + A_{xy} = \frac{G}{2}\left(\mu_{yz}^2 + \mu_{zx}^2 + \mu_{xy}^2\right).$$

Aus (120) und (122) folgt sodann die Gesamtarbeit für 1 cbcm

(123) $$A = G\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2} + \frac{\mu_{yz}^2 + \mu_{zx}^2 + \mu_{xy}^2}{2}\right) \text{ kgcm.}$$

Ersetzt man in Gleichung (119) nicht σ durch ε, sondern ε durch σ unter Benutzung der Gleichungen (110), ferner in Gleichung (121) nicht τ durch μ, sondern μ durch τ, nach (112), so ergibt sich

$$(124)\quad A = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y) + \frac{1}{2G}(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \text{ kgcm},$$

eine Gleichung, welche die elastische Arbeit durch die rechtschnittigen Spannungskomponenten ausdrückt.

Die elastische Energie eines beliebigen Körpers.

§ 43. In den meisten Fällen wird weder der Spannungszustand noch der Deformationszustand ein überall gleicher sein. Man wird daher die für 1 cbcm gefundenen Ausdrücke nur für ein Volumelement dV anwenden können und die elastische Energie durch Summation der Energie aller Elemente erhalten.

So ergeben sich für das elastische Energievermögen nach (118) die Gleichungen

$$(125)\quad U = G\int\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2} + \frac{1}{2}(\mu_{yz}^2 + \mu_{zx}^2 + \mu_{xy}^2)\right] dV$$

oder

$$(126)\quad U = \frac{1}{2E}\int(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)\, dV - \frac{1}{mE}\int(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\, dV + \frac{1}{2G}\int(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)\, dV.$$

Um diese Integrale auszuwerten, müsste man für (125) alle ε und μ, für (126) alle σ und τ als Funktionen der Koordinaten eines Körperpunktes ausdrücken und könnte hiernach die Integration, im allgemeinen eine dreifache, durchführen, eine Aufgabe, die nur in besonders einfachen Fällen mathematisch streng lösbar ist, meist aber durch Näherungsverfahren ersetzt werden muss.

Während das in den vorigen §§. mitgeteilte Verfahren zur Bestimmung von U von der Deformationsarbeit des Elements ausging, ist es in manchen Fällen einfacher, die Arbeitsgrössen an der Oberfläche oder an den Belastungspunkten auszudrücken und zu summieren.

Wirkt z. B. auf den Punkt P eines Körpers eine konstant gerichtete

Einzelkraft K, welche P nach Q verschiebt, so ist, wenn PQ mit K den Winkel φ bildet und $PQ \cos \varphi = \lambda$ gesetzt wird, die übertragene Arbeit, welche einer Vergrösserung von K um dK entspricht,

$$dA = K d\lambda = K \frac{\partial \lambda}{\partial K} dK.$$

Ist nun nach dem Hookeschen Gesetz $\frac{\partial \lambda}{\partial K}$ ein konstantes Verhältnis $= \frac{\lambda}{K}$, so folgt, für die Zunahme von $K = 0$ bis $K = K$

$$A = \frac{\lambda}{K} \int_0^K K dK = \frac{1}{2} K \lambda.$$

Viel weniger einfach wird dieses Verfahren, wenn mehrere oder gar unendlich viele Kräfte wirken. Für den Fall der Biegung findet es sich an einem Beispiel durchgeführt in § 73.

Anwendungen der elastischen Energie.

§ 44. Ist die geleistete Arbeit und damit nach Gleichung (118) $U_1 - U_2$ bekannt, so kann die Rechnung den Zweck haben, die entstehenden Deformationen oder den Spannungszustand zu ermitteln, welcher sich hierbei ergibt. In diesem Falle, welcher z. B. bei einem passiven oder aktiven Stoss eintreten kann, würde eine lösbare Aufgabe nur dann vorliegen, wenn man durch eine genügende Anzahl Bedingungsgleichungen entweder die ε und μ oder die σ und τ auf eine Veränderliche zurückführen kann. Ist diese durch Auflösung des Integrals als einzige Unbekannte gefunden, so ergeben sich weiter aus den Nebenbedingungen die ε und μ oder die σ und τ sowie die Hauptdehnungen und Hauptspannungen in beliebigen, insbesondere den gefährdetsten Punkten.

Das in dieser allgemeinen Darstellung recht umständlich erscheinende Verfahren gestaltet sich in manchen praktisch wichtigen Fällen, insbesondere bei stabförmigen und wandförmigen Körpern, einfach genug, um ohne übermässige Mühe durchführbar zu sein.

Bei allen Stosswirkungen geht übrigens ein Teil der Energie zunächst in kinetische Energie elastischer Teilschwingungen und dann in Wärme über. Diesen Energiebetrag in Rechnung zu ziehen ist in der Regel nicht möglich, da sich die Teilschwingungen wie Schallwellen nach allen Seiten ausbreiten und mit der Gesamtbewegung des Körpers nicht in einfacher

Beziehung stehen. Nur insofern die Akustik fester Körper auch auf den Grundgesetzen der Elastizitätslehre beruht, kann die hier vorliegende Aufgabe als nicht unlösbar betrachtet werden.

Die elastische Energie kann auch zur Berechnung unbekannter äusserer Kräfte dienen nach einem von **Castigliano**[1]) ausgebildeten Verfahren (s. § 73).

Immer mehr Wichtigkeit gewinnt die elastische Energie ferner in der Mechanik schnell bewegter Maschinenteile, z. B. zur Beurteilung periodischer Geschwindigkeits-Schwankungen.

Zusammenhang zwischen dem elastischen Verhalten eines Körpers und dem seiner Elemente.

§ 45. Die Brücke zwischen den Deformationen eines Körpers und denen seiner Elemente bilden die Deformationskoordinaten ξ, η, ζ (§ 11), welche in den Oberflächenpunkten gemessen werden können. Für die inneren Punkte ist jedoch eine direkte Wahrnehmung der Deformation unmöglich; man kann daher das wahre Deformationsgesetz nur auf indirektem Wege finden. Der übliche Weg besteht in der Einführung möglichst einfacher Deformationshypothesen, d. h. mathematischer Funktionen, von denen man vermutet, dass sie die Grössen ξ, η, ζ hinreichend genau durch x, y, z ausdrücken, deren Zulässigkeit aber dadurch geprüft werden kann, dass die für die Oberflächenpunkte aus ihnen zu folgernden Deformationskoordinaten den beobachteten Werten entsprechen, und dass auch der Spannungszustand, welcher, wie in den vorigen §§ gezeigt wurde, aus dem Deformationszustand folgt, für die Oberflächenpunkte, in denen er sich bei der Elastizitätsgrenze oder bei der Bruchgrenze zu erkennen gibt, der Wirklichkeit in dem für technische Zwecke erforderlichen Masse entspricht. Statt der Deformationshypothesen können mitunter Spannungshypothesen eingeführt werden.

Für die in den folgenden Abschnitten zu behandelnden Aufgaben sind geeignete Hypothesen schon lange in Gebrauch, so dass es meist genügen wird, ihre Zulässigkeit kurz zu erweisen. Unsere Hauptaufgabe wird vielmehr darin bestehen, Folgerungen aus diesen Hypothesen zu ziehen.

---

1) **A. Castigliano**, Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme, übersetzt ins Deutsche von **E. Hauff**, Wien 1886.

IV. Abschnitt.

Die Festigkeit gerader stabförmiger Körper bei einachsigem Spannungszustand.

Begriff des geraden Stabes, die Stabkräfte und ihre Bezeichnung.

§ 46. Ein stabförmiger Körper (s. § 2), auch Stabkörper oder Stab genannt, wird durch eine an beliebiger Stelle gedachte Schnittfläche in zwei Abschnitte zerlegt. Jeder dieser Abschnitte steht unter dem Einfluss von Kräften, deren Angriffspunkte teils in der Mantelfläche des Stabes, teils in dessen Massenelementen, teils in der gedachten Schnittfläche liegen, und er befindet sich unter dem Einfluss der Mantelkräfte, der Massenkräfte und der Schnittkräfte im Gleichgewicht der Ruhe oder der Bewegung, wenn die Resultante dieser Kräfte Null ist, im Zustande der Beschleunigung, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Denkt man sich eine stetige Folge ebener Schnittflächen so gelegt, dass die Linie, welche die Schwerpunkte der Schnittfiguren verbindet, alle Schnittebenen rechtwinklig schneidet, so werde diese Linie als Zentrallinie bezeichnet. Wenn die Zentrallinie des unbelasteten Stabes eine Gerade ist, so nennen wir diesen selbst einen geraden Stab und die Zentrallinie Stabachse. Wird ein gerader Stab auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, so nehmen wir die Stabachse als X-Achse, wonach die Normalschnitte zur YZ-Ebene parallel werden.

s bezeichne die einem bestimmten elastischen Zustand entsprechende Länge einer Faserstrecke, die gerade oder gekrümmt sein, z. B. auch mit der Zentrallinie zusammenfallen kann.

Ein durch zwei Normalschnitte F im Abstande $\mathrm{d}s$ begrenzter, einfach unendlich kleiner scheibenförmiger Körper, d. h. ein elastisches Stabelement, dessen Volum

$$\mathrm{d}V = F\,\mathrm{d}s \tag{127}$$

und dessen Gewicht

$$\mathrm{d}G = \gamma F \mathrm{d}s\,, \tag{128}$$

ist, unter γ das Gewicht der Volumeinheit verstanden, empfängt an seinem Umfang die Wirkung einer ebenfalls einfach unendlich kleinen Mantelkraft, welche mit $\mathrm{d}G$ oder anderen etwa noch vorhandenen Massenkräften zu einer Resultante $\mathrm{d}P$ vereinigt werden kann. Wir bezeichnen $\mathrm{d}P$ als Belastung des Stabelements, nennen

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s} = p\text{ [1]) in kg/cm} \tag{129}$$

Belastung der Längeneinheit oder spezifische Belastung und ersetzen p durch die rechtwinkligen Komponenten p_x, p_y, p_z.

Zerlegt man auch $\mathrm{d}P$ in die Komponenten $\mathrm{d}P_x$, $\mathrm{d}P_y$, $\mathrm{d}P_z$, so ergeben sich die Gleichungen

$$\mathrm{d}P_x = p_x \mathrm{d}s\,, \qquad \mathrm{d}P_y = p_y \mathrm{d}s\,, \qquad \mathrm{d}P_z = p_z \mathrm{d}s\,, \tag{130}$$

welche man integrieren kann, wenn p_x, p_y, p_z als Funktionen der Stablänge s gegeben sind.

Die Kraft $\mathrm{d}P$ wird im allgemeinen die elementare Scheibe in einem Punkte mit den Koordinaten y, z schneiden, und auch diese können von Element zu Element verschieden sein. In sehr vielen Fällen sind jedoch diese Koordinaten Null, oder so klein, dass man sie vernachlässigen kann. Dies werde, dem Begriff des Stabes entsprechend, stets angenommen, wenn nicht das Gegenteil besonders bemerkt wird.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man die Belastung einer gewissen (kurzen) Stabstrecke durch ihre Resultante ersetzt. Wir bezeichnen solche konzentrierte Belastungen mit K, ihre Komponenten mit K_x, K_y, K_z.

In jedem Element $\mathrm{d}F$ der Schnittfläche herrschen die Spannungskomponenten σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} (s. § 23), sonach die Spannkräfte

$$\mathrm{d}S = \sigma_x \mathrm{d}F\,, \qquad \mathrm{d}T_y = \tau_{xy} \mathrm{d}F\,, \qquad \mathrm{d}T_z = \tau_{xz} \mathrm{d}F\,,$$

deren Summation über den ganzen Querschnitt die Schnittkräfte

$$S = \int \sigma_x \mathrm{d}F\,, \qquad T_y = \int \tau_{xy} \mathrm{d}F\,, \qquad T_z = \int \tau_{xz} \mathrm{d}F \tag{131}$$

ergibt.

Besonders einfach wird der Zusammenhang zwischen der Belastung und den Schnittkräften, sowie die Ermittelung des elastischen Zustands für die

1) Verwechselungen mit der Bedeutung von p nach § 16 sind umsoweniger zu befürchten, als p in jener Bedeutung in diesem Abschnitt nicht vorkommt.

in den folgenden §§ behandelten wichtigen Fälle, für achsiale Belastung, für Biegung und für Torsion.

Der prismatische Stab unter achsialer Belastung. Zug oder Druck.

§ 47. Ist die Stabachse, wie in § 46 angenommen, die X-Achse, so findet achsiale Belastung dann statt, wenn die Belastungskomponenten p_y, p_z, K_y, K_z überall Null sind und die Angriffspunkte von p_x und K_x in der Stabachse liegen.

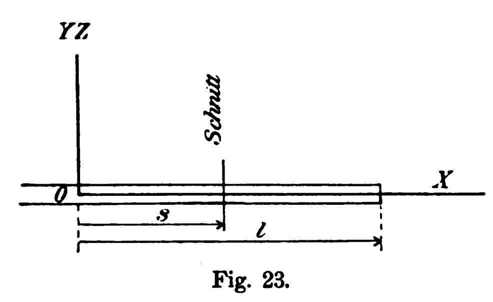


Fig. 23.

Wählen wir einen an sich beliebigen Punkt der Stabachse als Koordinatenanfang O und bezeichnen mit s den Abstand eines ebenfalls beliebigen Normalschnittes von O, mit l den Abstand der Endfläche von O, so wird der Stab durch den Normalschnitt in zwei Teile zerlegt.

Betrachten wir zunächst den rechts liegenden Teil von der Länge $l - s$, so kann dessen Belastung in stetig verteilten Kräften von der Summe

$$\int_s^l p_x \, ds$$

und in konzentrierten Kräften bestehen, deren Summe mit

$$\sum_s^l K_x$$

bezeichnet werde.

Im Hinblick auf die erste der Gleichungen (131) lautet dann die einzige hier in Frage kommende Gleichgewichtsbedingung

$$(132) \qquad \int_s^l p_x \, ds + \sum_s^l K_x - \int \sigma_x \, dF = 0 \, .$$

Sind die beiden ersten Glieder bekannt, was der Fall ist, wenn man die Belastung kennt, so nennt man die Aufgabe statisch bestimmt.

In diesem Falle kann man aus Gleichung (132) das letzte, die Schnittkraft darstellende Glied berechnen.

Je nachdem die Schnittkraft positiv oder negativ ist, sagen wir, der Stab sei in dem betreffenden Querschnitt auf **Zug** oder auf **Druck** beansprucht. Eine mit (132) analog gebildete Gleichung kann man für den linksschnittigen Stabteil aufstellen. Für den Fall, dass O der linke Endpunkt ist, lautet dieselbe

$$\int_0^s p_x \mathrm{d}s + \sum_0^s K_x + \int \sigma_x \mathrm{d}F = 0 . \tag{133}$$

§ 48. Auch aus dieser Gleichung kann man die Schnittkraft berechnen, wenn die Belastungsglieder bekannt sind. **Statisch unbestimmt** ist die Aufgabe erst dann, wenn für keine Seite die Belastung vollständig gegeben ist.

Zugbelastung des prismatischen Stabes durch zwei in den Endflächen wirkende Kräfte.

Wirkt nach rechts nur eine Kraft K, und ist p_x überall Null, so kann der Stab nur im Gleichgewicht sein, wenn die linke Endkraft

$$K' = -K$$

ist. Sowohl nach (132) wie nach (133) findet man daher für jeden Normalschnitt

$$\int \sigma_x \mathrm{d}F = K . \tag{134}$$

Selbst in diesem einfachen Falle kann der elastische Zustand nicht ohne Zuhilfenahme einer Deformations- oder einer Spannungshypothese ermittelt werden (s. § 45). Die hier übliche und erfahrungsgemäss zulässige Hypothese lautet: **In einem Normalschnitt ist im vorliegenden Falle σ_x überall gleich, und zwar ist σ_x eine Hauptspannung σ_1** [1]**.**

Nach Gleichung (134) wird dann

$$\sigma_1 \int \mathrm{d}F = K ,$$

also

$$\sigma_1 = \frac{K}{F} . \tag{135}$$

Hiernach folgt weiter nach Gleichung (101)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} ,$$

1) Eine Prüfung dieser Hypothese für den Kreiszylinder enthält § 106.

so die Verlängerung des Stabes gegenüber der anfänglichen Länge s

$$36)\qquad \Delta s = \varepsilon_1 s = \frac{\sigma_1}{E} s = \frac{K}{EF} s .$$

Unter Berücksichtigung einer gleichmässigen Temperaturänderung Δt, i dem Ausdehnungskoeffizienten α, wird

$$\Delta s = \left(\frac{\sigma_1}{E} + \alpha \Delta t + \frac{\sigma_1}{E} \alpha \Delta t\right) s$$

er, mit zulässiger Vernachlässigung des letzten Gliedes in der Klammer,

$$37)\qquad \Delta s = \left(\frac{K}{EF} + \alpha \Delta t\right) s .$$

Während σ_1 für den statisch bestimmten Fall aus Gleichung (135) be- chnet werden kann, findet man σ_1 für den statisch unbestimmten Fall s Gleichung (136), wenn E und Δs bekannt sind. Ist K und Δs be- ınnt, so kann man aus (136) E finden.

Die elastische Energie ist nach (126)

$$38)\qquad U = \frac{\sigma_1{}^2}{2E} V \text{ oder } U = \frac{E\varepsilon_1{}^2}{2} V .$$

Der gerade Stab von ungleichmässigem Querschnitt unter achsialer Belastung.

§ 49. Wie für den prismatischen Stab, gelten auch hier die Gleichungen (132) ler (133).

Ist die Abweichung von der prismatischen Form nur gering, was be- :its zum Begriff des Stabkörpers gehört, so kann näherungsweise auch hier ir alle Punkte eines Normalschnittes gleiche Normalspannung σ_x ange- ommen, also

$$39)\qquad S = \int \sigma_x \mathrm{d}F = \sigma_x F$$

esetzt werden. Nach den Betrachtungen des § 32 können die ebenen ormalschnitte nur dann Netzflächen sein, wenn sie die Oberfläche überall :chtwinklig schneiden, was für einen nicht prismatischen Stab im allge- einen nicht der Fall ist. σ_x wird daher auch keine Hauptspannung sein ıd zwar umsoweniger, je mehr sich die Oberfläche von der Form eines ·isma unterscheidet. Nimmt man dies trotzdem an und benutzt Glei- ung (136) für ein Stabelement von der Länge $\mathrm{d}s$, so erhält man als iherung

$$d(\Delta s) = \frac{\sigma_x}{E} ds . \tag{140}$$

Setzt man hier für σ_x den aus (132) und (139) folgenden Wert

$$\sigma_x = \frac{1}{F} \left(\int_s^l p_x ds + \sum_s^l K_x \right) \tag{141}$$

so erhält man

$$\Delta s = \int_s^l \frac{ds}{EF} \left(\int_s^l p_x ds + \sum_s^l K_x \right) . \tag{142}$$

Für den im § 48 behandelten Fall, dass der Stab nur an den Enden von gleichen, entgegengesetzt gerichteten Kräften K und K' belastet wird, erhält man für die Spannung im Querschnitt F

$$\sigma_x = \frac{K}{F} \tag{143}$$

und für die Verlängerung des ganzen Stabes

$$\Delta s_1 = \frac{K}{E} \int_0^l \frac{ds}{F} . \tag{144}$$

Biegung eines geraden Stabes von symmetrischen Querschnitten in der Symmetrieebene.

§ 50. Unter Biegung werde nach allgemeinem Sprachgebrauch eine Formänderung verstanden, bei welcher die ursprünglich gerade Stabachse die Form einer Kurve annimmt, und zwar hier speziell eine solche, bei der die Zentrallinie im ganzen und in den einzelnen Teilen die anfängliche Länge behält. Die „Biegung in der Symmetrieebene“ soll die weitere Bedingung ausdrücken, dass die entstehende Kurve mit allen ihren Punkten in dieser Ebene verbleibt, dass sie also eine ebene oder einfach gekrümmte Kurve ist.

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn sämtliche Belastungen in der Symmetrieebene wirken. Ist diese die XY-Ebene, so muss also p_z und K_z überall Null sein.

Durch geometrische Bestimmung der deformierten Mittellinie ist die Formänderung des Stabes noch nicht vollständig bestimmt. Das wäre aber

z. B. dann der Fall, wenn noch vorgeschrieben würde, dass alle materiellen zur Achse normalen Querschnitte im deformierten Stab Normalebenen zur gebogenen Mittellinie bleiben, dass sich ihre Form und Grösse nicht ändert, und dass sie sich nicht um ihren Schwerpunkt drehen. Man erhält von diesen Bedingungen, die wir die Bernoullische [1]) Hypothese (s. § 45) nennen wollen, eine zutreffende Vorstellung, wenn man die Stabachse als einen Draht, Fig. 24, auffasst, auf welchem Blechscheiben von der Gestalt der Normalschnitte fest gelötet sind, die im übrigen keine Verbindung unter einander haben, so dass sie einer Biegung des Drahtes zwanglos folgen können.

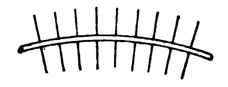


Fig. 24.

Da in Wirklichkeit eine materielle Verbindung dieser Scheiben besteht, so muss, wenn wir dieselbe in unendlich viele federartig wirkende Stäbchen von der Länge ds und dem Querschnitt dF zerlegt denken, jedes dieser Stäbchen eine Längenänderung erfahren. Ausgenommen hiervon sind nur diejenigen Stäbchen oder Faserelemente, die in einer durch den Schwerpunkt gehenden Normalen zur Biegungsebene, der neutralen Linie des Querschnitts, liegen.

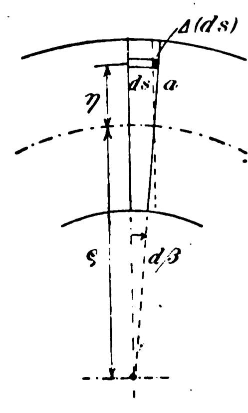


Fig. 25.

Indem wir zu den mechanischen Folgerungen der Bernoullischen Hypothese übergehen, sei schon hier bemerkt, dass dabei die Annahme über die Unveränderlichkeit der Querschnitte nicht streng festgehalten wird.

Biegung ohne achsiale Belastung.

§ 51. Ist η der Abstand eines Faserelements ds von der neutralen Linie [2]), positiv auf der konvexen, negativ auf der konkaven Seite angenommen, Δ(ds) seine Verlängerung (in Fig. 25 als kleine schwarze Fläche dargestellt), ϱ der Krümmungshalbmesser der Zentrallinie, so folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$\Delta(ds) : ds = \eta : \varrho$$

---

1) Jacob Bernoulli. Véritable hypothèse de la résistance des solides. Mémoire de l'académie des sciences de Paris 1705 p. 230, oder: Opera T. II p. 976.

2) Abweichend von der Bedeutung in § 11.

oder, da

$$\frac{\Delta(\mathrm{d}s)}{\mathrm{d}s} = \varepsilon_x ,$$

(145) $$\varepsilon_x = \frac{\eta}{\varrho} .$$

Sind die Spannungen

(146) $$\sigma_y = \sigma_z = 0 ,$$

was dann der Fall sein kann, wenn in der Nähe des betrachteten Stabelements keine Mantelkräfte wirken, so wird nach (110)

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} = \sigma_x ,$$

also nach (145)

(147) $$\sigma_x = E\frac{\eta}{\varrho}$$

und nach (131)

(148) $$S = \int \sigma_x \mathrm{d}F = \frac{E}{\varrho}\int \eta \,\mathrm{d}F .$$

Da nach der Annahme § 46 die Stabachse durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht, so ist $\int \eta \,\mathrm{d}F$ das lineare oder statische Flächenmoment des Querschnitts, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Gerade, und als solches gleich Null. Sonach wird auch $S = 0$, d. h. nach Gleichung (132), die auch hier gilt, muss sein

(149) $$\int_s^l p_x \mathrm{d}s + \sum_s^l K_x = 0 ,$$

damit, wie angenommen, die neutrale Linie des Querschnitts durch den Schwerpunkt geht. Soll diese Voraussetzung überall zutreffen, so muss $p_x = 0$ und $K_x = 0$ sein, d. h. es dürfen keine nach X gerichteten Belastungen (Zug- oder Druckkräfte) vorhanden sein.

Gleichgewichtsbedingungen für reine Biegung.

§ 52. Die hiernach allein übrig bleibenden Belastungen p_y und K_y müssen, damit sie mit den Spannkräften ins Gleichgewicht kommen, noch zwei Gleichungen erfüllen, erstens die Summengleichung der Y-Komponenten

50) $$\int_s^l p_y \mathrm{d}s + \sum_s^l K_y - \int \tau_{xy} \mathrm{d}F = 0,$$

reitens die Momentengleichung

51) $$\int_s^l p_y k \mathrm{d}s + \sum_s^l K_y k - \int \sigma_x \eta \mathrm{d}F = 0.$$

leichung (150) drückt aus, dass die Summe aller auf den rechts-hnittigen Stabteil wirkenden Komponenten nach Y gleich Null ist, Gleiung (151), dass die Summe der statischen Momente dieser Komponenten, zogen auf die neutrale Linie des Querschnitts, Null ist. Dabei beutet k den Hebelarm einer Belastung p_y oder K_y, in Bezug auf die neuale Linie, eine Grösse, die allgemein Krafthebelarm der biegenden raft genannt werden möge, und welche durch den kürzesten Abstand vischen ihr und der neutralen Linie dargestellt wird, sonach mit der age einer Kraft gegenüber dem elastischen Stabelement gegeben ist.

Das letzte Glied in Gleichung (151) drückt das Moment der Spannraft aus. Wir nennen es Schnittmoment und verwenden gelegentlich ie Abkürzung

152) $$\int \sigma_x \eta \mathrm{d}F = M_z.$$

er Index z, der meist entbehrt werden kann, soll dabei andeuten, dass I_z auf eine zu Z parallele Achse bezogen ist.

Zu Gleichung (150) ist noch zu bemerken, dass, wenn σ_x eine Hauptpannung ist, $\tau_{xy} = 0$, also auch $\int \tau_{xy} \mathrm{d}F = 0$, sonach

153) $$\int_s^l p_y \mathrm{d}s + \sum_s^l K_y = 0$$

t. In diesem Falle besteht die Belastung aus einem resultierenden Kräfteaar. Eine solche Belastung ist also erforderlich um $\sigma_x = \sigma_1$ zu erben. Diesen Fall bezeichnet man als reine Biegung. Ist Gleichung 53) nicht erfüllt, so ist doch τ_{xy} um so kleiner und daher σ_x um so weniger n σ_1 verschieden, je kleiner die Querschnittsordinaten des Stabes nach im Verhältnis zu den Krafthebelarmen k sind. Wir werden bis auf eiteres σ_x als einzige Hauptspannung ansehen, eine vereinfachende Anhme, deren Berechtigung jedoch in jedem Sonderfalle zu prüfen ist.

Die Beugung.

§ 53. Ersetzt man in Gleichung (152) σ_x durch den Ausdruck (147), so folgt

$$(154) \qquad M_z = \frac{E}{\varrho}\int \eta^2 \mathrm{d}F,$$

oder mit der Abkürzung

$$(155) \qquad \int \eta^2 \mathrm{d}F = J$$

nach Gleichung (151)

$$(156) \qquad M_z = \int_x^l p_y k \,\mathrm{d}s + \sum_x^l K_y k = \frac{EJ}{\varrho}.$$

J ist das **quadratische oder Trägheitsmoment** des Querschnitts, bezogen auf die neutrale Linie, die zugleich Schwerpunktsachse ist.

Bezeichnet noch $\mathrm{d}\beta$ den elementaren Biegungswinkel nach Fig. 25, so ist $\varrho \mathrm{d}\beta = \mathrm{d}s$. Danach ergibt sich zu (156) die Nebenform

$$(157) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = \frac{M_z}{EJ}.$$

$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}$ ist die infolge der Biegung entstehende Querschnittsdrehung für die Längeneinheit, eine Grösse, die wir **Beugung** nennen und gelegentlich mit B bezeichnen wollen.

Die Gleichung (157) beruht auf den in (145) und (146) ausgedrückten Voraussetzungen, von denen die erste der **Bernoullischen Hypothese** entspricht, die zweite indirekt eine kleine Abweichung von derselben bedingt, da nach (110) und (147) für $\sigma_y = \sigma_z = 0$

$$(158) \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\sigma_x}{Em} = -\frac{1}{m}\frac{\eta}{\varrho}$$

folgt, also nicht $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, was bei unveränderlicher Form und Grösse der Querschnitte der Fall sein müsste.

Die Gleichungen (158) stellen eine Bedingung dar, ohne welche (145) und (146) nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Wäre z. B. der Querschnitt gehindert, sich zu verändern, etwa infolge Zusammenhanges mit einem anderen Körper, so erhielte man für $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ aus Gleichung (7) $e = \varepsilon_x$, also aus der ersten der Gleichungen (110)

(159) $$\sigma_x = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m-1}{m-2} E\varepsilon_x,$$

z. B. für $m = 3{,}3$, $\sigma_x = 1{,}36\, E\varepsilon_x$, also $\varepsilon_x = 0{,}74 \frac{\sigma_x}{E}$.

Dieses Beispiel zeigt, wie sehr das Verhältnis zwischen σ_x und ε_x z. B. durch plötzliche Querschnittsänderungen beeinflusst wird, dass also ein Körper, bei welchem solche vorkommen, nicht mehr als Stabkörper aufgefasst werden darf.

Die grösste Biegungsspannung im Querschnitt.

§ 54. Nach (147) wird dem grössten η (es heisse a) der grösste Wert von σ_x (er werde mit σ_a bezeichnet) entsprechen. Für diese Grenzwerte ergibt (147)

(160) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{E}\frac{\sigma_x}{\eta} = \frac{1}{E}\frac{\sigma_a}{a},$$

und man erhält aus (157) und (160) 5 Ausdrücke für die Beugung

(161) $$B = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{M_z}{EJ} = \frac{1}{E}\frac{\sigma_x}{\eta} = \frac{1}{E}\frac{\sigma_a}{a},$$

sowie ferner die wichtige Gleichung

(162) $$M_z = \frac{J}{a}\sigma_a.$$

In dieser Gleichung ist $\frac{J}{a}$ eine geometrische Funktion des Querschnitts, für welche die Bezeichnung

$$\frac{J}{a} = W = \text{Widerstandsmoment}\,^{1)}$$

in Gebrauch ist, bei deren Einführung man erhält

(163) $$M_z = W\sigma_a.$$

Biegung des geraden Stabes von beliebigem Querschnitt in beliebiger Richtung.

§ 55. Gleichviel, ob die aus der Stabachse entstehende Kurve einfach oder doppelt gekrümmt ist, so kann jedenfalls ein Element der Kurve als

1) „Widerstandsquotient“ würde vielleicht besser der Eigenart dieser Funktion entsprechen.

einfach gekrümmt aufgefasst werden, wobei die Schmiegungsebene als Krümmungsebene zu gelten hat. In Fig. 26 sei ein solches Stabelement in der Lage dargestellt, dass die Hauptachsen des Querschnitts, die in der Figur zugleich Symmetrieachsen sind, senkrecht und wagrecht erscheinen. Wird nun eine Biegung in einer Ebene angenommen, deren Normale ON mit der Y-Achse den Winkel β bildet, so ist ON die spannungslose oder neutrale Gerade des Querschnitts, und unter der Annahme (145) und (146) ist auch hier nach Gleichung (147)

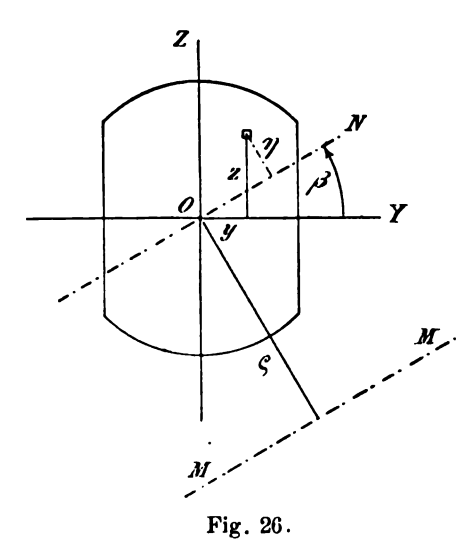


Fig. 26.

$$\sigma_x = E\frac{\eta}{\varrho},$$

oder, wenn η durch die Koordinaten für die Hauptachsen mittelst der Transformationsgleichung

(164) $$\eta = z \cos\beta - y \sin\beta$$

ausgedrückt wird,

(165) $$\sigma_x = \frac{E}{\varrho}(z \cos\beta - y \sin\beta).$$

Für den ganzen Querschnitt ergeben sich hiernach die auf die Hauptachsen bezogenen Schnittmomente

(166) $$M_y = \int \sigma_x z \,\mathrm{d}F, \qquad -M_z = \int \sigma_x y \,\mathrm{d}F,$$

die durch ein resultierendes Schnittmoment M um eine Achse OA ersetzt werden können, mit welchem sie in bekannter Weise durch die Gleichungen

(167) $$M_y = M\cos\alpha, \qquad M_z = M\sin\alpha$$

zusammenhängen, unter α den Winkel YOA (s. Fig. 27) verstanden.

Aus (165) (166) (167) folgt weiter

$$M\cos\alpha = \frac{E}{\varrho}(\cos\beta\int z^2\mathrm{d}F - \sin\beta\int yz\,\mathrm{d}F),$$

$$M\sin\alpha = -\frac{E}{\varrho}(\cos\beta\int yz\,\mathrm{d}F - \sin\beta\int y^2\mathrm{d}F)$$

oder, da für die Hauptträgheitsachsen bekanntlich das Centrifugalmoment

$$C_{xy} = \int yz\,\mathrm{d}F = 0$$

ist, und mit den Abkürzungen $\int z^2 \mathrm{d}F = J_y$, $\int y^2 \mathrm{d}F = J_z$,

$$\text{(168)} \qquad M \cos\alpha = \frac{E}{\varrho} J_y \cos\beta,$$

$$M \sin\alpha = \frac{E}{\varrho} J_z \sin\beta.$$

Aus diesen Gleichungen folgt weiter:

$$\text{(169)} \qquad \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} = \frac{J_z}{J_y}, \quad ^{1)}$$

ferner:

$$\text{(170)} \qquad \frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{M}{E}\right)^2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{J_y^2} + \frac{\sin^2\alpha}{J_z^2}\right)$$

oder, nach (145) mit der Abkürzung

$$\text{(171)} \qquad \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{J_y^2} + \frac{\sin^2\alpha}{J_z^2}} = \frac{1}{H},$$

$$\text{(172)} \qquad \varepsilon_x = \frac{\eta}{\varrho} = \frac{M\eta}{EH}$$

sowie nach (147)

$$\text{(173)} \qquad \sigma_x = M \frac{\eta}{H}.$$

Aus Gleichung (169) ist ersichtlich, dass α und β im allgemeinen verschieden sind. Leicht zu übersehen ist der Zusammenhang in Fig. 27, in welcher $OB = J_y$, $OC = J_z$, ON die neutrale Linie ist, welche die Kreise mit OB und OC in D und E schneidet. Zieht man durch D eine senkrechte, durch E eine wagerechte Gerade, so erhält man im Schnittpunkte A einen Punkt der Achse des resultierenden biegenden Moments, denn es ist

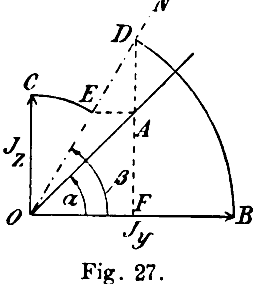


Fig. 27.

$$OF = J_y \cos\beta, \quad AF = J_z \sin\beta,$$

$$\operatorname{tang} AOF = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha.$$

Ist α gegeben, so findet man analog einen Punkt der neutralen Linie und

---

1) Die Bedingung ebener Krümmung ist hiernach $\operatorname{tang}\beta = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tang}\alpha = \text{Konst.}$

damit diese selbst nach Anleitung der Fig. 28, in welcher

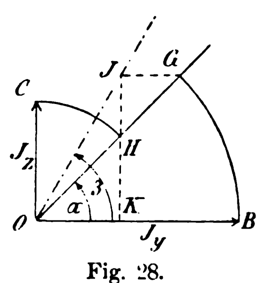


Fig. 28.

$$OK = J_z \cos\alpha, \qquad JK = J_y \sin\alpha, \text{ also}$$

$$\operatorname{tang} JOK = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\beta \text{ ist.}$$

Die Richtung der neutralen Linie liegt jederzeit der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes, hier J_z, näher als die Achse des resultierenden biegenden Momentes.

Denkt man sich bei ruhendem Querschnitt die Achse OA gedreht, so beschreiben die Punkte A und J Ellipsen.

Wird hingegen OA festgehalten und der Querschnitt gedreht, so beschreibt J einen Kreis (vergl. § 20).

Biegung des geraden Stabes in Verbindung mit achsialer Belastung.

§ 56. Mit den Bezeichnungen nach Fig. 29 ist im vorliegenden Falle für irgend einen Normalschnitt

(174) $$\int \sigma_x \mathrm{d}F = K,$$

(175) $$\int \sigma_x \eta \mathrm{d}F = M,$$

unter M das Moment Ph verstanden.

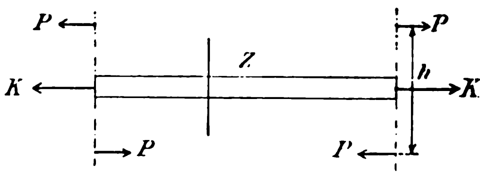


Fig. 29.

Ergibt sich durch K allein die gleichmässige Dehnung ε_0 und durch M die Beugung $B = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}$, so ist für irgend einen Punkt des Querschnitts

(176) $$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\eta,$$

wenn η den Abstand von der durch den Schwerpunkt gehenden Parallelen zur neutralen Achse bedeutet, welche Geraden hier nicht zusammenfallen.

Da man mit derselben Berechtigung wie in den vorigen §§ $\sigma_x = E\varepsilon_x$ n kann, so folgt aus (174) und (176), da $\int \eta \, \mathrm{d}F = 0$,

$$\varepsilon_0 = \frac{K}{EF},$$

aus (175), je nachdem die Momentenebene eine Hauptebene ist oder

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = \frac{M}{EJ} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = \frac{M}{EH}.$$

Setzt man die Werte aus (177) und (178) in (176) ein, so folgt

$$\varepsilon_x = \frac{K}{EF} + \frac{M}{EJ}\eta \quad \text{oder} \quad \varepsilon_x = \frac{K}{EF} + \frac{M}{EH}\eta$$

$$\sigma_x = \frac{K}{F} + \frac{M}{J}\eta \quad \text{oder} \quad \sigma_x = \frac{K}{F} + \frac{M}{H}\eta.$$

Die absolut grösste, für $\eta = a$ stattfindende, Spannung ist also

$$\sigma_a = \frac{K}{F} + \frac{M}{J}a \quad \text{oder} \quad \sigma_a = \frac{K}{F} + \frac{M}{H}a,$$

absolut kleinste, für $-\eta = a'$ stattfindende,

$$\sigma_a' = \frac{K}{F} - \frac{M}{J}a' \quad \text{oder} \quad \sigma_a' = \frac{K}{F} - \frac{M}{H}a'.$$

Die elastische Energie des auf Zug und Biegung beanspruchten Stabes.

Nach (119) ist die Dehnungsarbeit für ein Volumelement $\frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \mathrm{d}F \mathrm{d}s$, § 57. nach die im elastischen Gleichgewicht aufgesammelte elastische Energie Gleichung (179) und (180), unter Vernachlässigung der Schubspannung,

$$U = \frac{1}{2E}\int\int\left(\frac{K}{F} + \frac{M}{H}\eta\right)^2 \mathrm{d}F\,\mathrm{d}s.$$

Für einen prismatischen Stab (Fig. 29) von der Länge l erhält man, $\eta \, \mathrm{d}F$ als statisches Moment für die Schwerachse gleich Null ist und K M konstant sind, mit der Abkürzung $\int \eta^2 \mathrm{d}F = J$,

(183) $$U = \frac{l}{2E}\left(\frac{K^2}{F} + \frac{M^2}{H^2}J\right).$$

Wenn die Momentenachse mit einer Hauptachse des Querschnitts zusammenfällt, so wird nach (171) $H = J$, also

$$U = \frac{l}{2E}\left(\frac{K^2}{F} + \frac{M^2}{J}\right).$$

Ist nur Zug oder nur Biegung vorhanden, so erhält man

(185) für Zug $$U = \frac{K^2}{2E}\frac{l}{F},$$

(186) für Biegung $$U = \frac{M^2}{2E}\frac{l}{J}.$$

Die Energie, welche durch das Zusammenwirken einer achsialen Einzelkraft und eines biegenden Momentes dem Stab zugeführt wird, ist also gleich der Summme der Energien, welche durch die beiden Wirkungen für sich hervorgebracht werden.

Würden aber gleichzeitig zwei Achsialkräfte K_1 und K_2 in Tätigkeit treten, so würde

$$U \text{ nicht gleich } \frac{K_1^2}{2E}\frac{l}{F} + \frac{K_2^2}{2E}\frac{l}{F},$$

sondern

(187) $$U = \frac{(K_1 + K_2)^2}{2E}\frac{l}{F},$$

und entsprechend würde für zwei Momente mit gleicher Achse

(188) $$U = \frac{(M_1 + M_2)^2}{2E}\frac{l}{J}.$$

Für ein Stabelement ds, in welchem die Schnittkraft S und das Schnittmoment M herrscht, erhält man

$$dU = \frac{ds}{2E}\left(\frac{S^2}{F} + \frac{M^2}{J}\right).$$

sonach für den ganzen Stab, wenn S, M, F, J sich von Punkt zu Punkt ändern,

$$U = \frac{1}{2E}\left(\int \frac{S^2}{F} ds + \int \frac{M^2}{J} ds\right), \tag{89}$$

e Integrationen über den ganzen Stab ausgedehnt.

Die Biegungslinie oder elastische Linie.

§ 58. Aus Gleichung (156) bezw. (172)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_z}{EJ} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EH} \tag{190}$$

isst sich für die einfach gekrümmte Biegungslinie eine Näherungsgleichung ı rechtwinkligen Koordinaten ableiten. Wir entwickeln dieselbe für den 'all $H = J$ (s. § 55) und $M_z = M$.

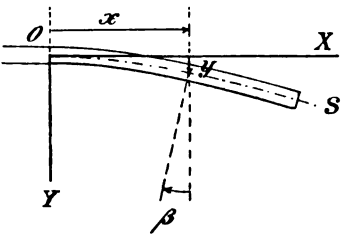


Fig. 30.

In Fig. 30 sei OX die Achse eines ;eraden Stabes in unbelastetem Zustand. ln demselben werde in O ein Koordiıatensystem befestigt, dessen X-Achse nit der Achse des unbelasteten Stabes usammenfällt, und welches zunächst als uhend betrachtet werde. Tritt eine Biegung des Stabes ein, so entsteht aus ler Stabachse die Biegungslinie OS, welche die X-Achse in O berührt, da, wie wir annehmen, das Koordiıatensystem dem Stabelement in O gegenüber vollkommen unbeweglich ist.

Für irgend einen Punkt x, y [1]) der Biegungslinie ist bekanntlich

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{191}$$

Venn nun die Krümmung nur gering [2]) ist, so wird $\frac{dx}{ds} = \cos\beta$ (unter β

---

1) y hat hier dieselbe Bedeutung wie η in § 11.

2) Die genaue Ermittelung der Gleichung der elastischen Linie führt auf lliptische Integrale. Die erste Bearbeitung erfuhr dieses Problem durch Euler 744. Vergl. „Saalschütz: Der belastete Stab unter Einfluss einer seitlichen raft, auf Grundlage des strengen Ausdrucks für ϱ (Teubner 1880)" sowie C. Kriemler: Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer,

den im Sinne der Drehung von $+X$ nach $+Y$ positiven Neigungswinkel der Tangente oder der Normalen, den **Biegungswinkel**, verstanden) von 1 nur wenig verschieden sein. Setzt man aber in (191) $\frac{dx}{ds} = 1$, so wird

(192) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

also nach Gleichung (190), wenn M im Sinne von β positiv ist,

(193) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}.$$

Diese Gleichung ist integrierbar, wenn die rechte Seite nur Funktionen von x und y enthält und zwar besonders einfach, wenn y nicht vorkommt.

Durch die erste Integration erhält man bis auf eine Integrationskonstante

(194) $$\frac{dy}{dx} = \tan g\beta,$$

und mit Rücksicht auf die Kleinheit von β kann man meist zur Vereinfachung

(195) $$\frac{dy}{dx} = \beta$$

setzen.

Eine zweite Integration liefert sodann, ebenfalls wieder bis auf eine Konstante,

(196) $$F(x, y) = 0,$$

d. i. die **Gleichung der Biegungslinie** (auch **elastische Linie** genannt). Zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten sind zwei Gleichungen nötig, die sich aus der Anwendung der Gleichungen (195) und (196) auf Punkte der Biegungslinie ergeben, für welche β oder y bekannt ist. Bei der angenommenen Lage des Koordinatensystems ist z. B. für $x = 0$ auch $\beta = 0$ und $y = 0$.

---

auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge (Braun, Karlsruhe 1902)". Für die seltenen Fälle, in denen eine sehr genaue Bestimmung der elastischen Linie praktische Wichtigkeit erlangt, dürfte das Verfahren schrittweiser Annäherung genügen, welches in den Aufgaben, Gruppe III, auseinandergesetzt ist.

Es sei z. B. als Momentenfunktion gegeben $M = ax$[1], unter a ie Konstante verstanden, E und J konstant, so wird nach (193)

$$\frac{y}{{}^2} = \frac{a}{EJ} x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{EJ}\frac{x^2}{2} + C_1, \qquad y = \frac{a}{EJ}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

rner für $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad y = 0, \quad \text{also} \quad C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_2 = 0.$$

Wäre für dieselbe Momentenfunktion die Lage der Biegungslinie im oordinatensystem dadurch gegeben, dass sie mit unbekannter, bei der iegung veränderlicher Richtung durch zwei bestimmte Punkte hindurch ht, deren Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 bekannt sind, so würden sich r diese Punkte aus (196) für y die Gleichungen

$$y_1 = \frac{a}{EJ}\frac{x_1{}^3}{6} + C_1 x_1 + C_2,$$

$$y_2 = \frac{a}{EJ}\frac{x_2{}^3}{6} + C_1 x_2 + C_2$$

rgeben, aus denen sich C_1 und C_2 berechnen lassen.

Wäre für einen Punkt mit der Abszisse x_1 der Biegungswinkel β, für inen zweiten aber die Lage durch die Koordinaten x_2, y_2 bekannt, so olgten die Konstanten aus den Gleichungen

$$\beta_1 = \frac{a}{EJ}\frac{x_1{}^2}{2} + C_1,$$

$$y_2 = \frac{a}{EJ}\frac{x_2{}^3}{6} + C_1 x_2 + C_2.$$

Die Momentenfunktionen können bekannt oder unbekannt sein, ud zwar betrachten wir sie auch dann als bekannt, wenn sie sich nach en allgemeinen Gleichungen der Mechanik ohne Rücksicht auf die Elastiität berechnen lassen. Ersterenfalls nennt man die Aufgabe statisch estimmt, letzterenfalls statisch unbestimmt (s. § 47). Eine statisch ıbestimmte Aufgabe kann mit Hilfe der Biegungslinie gelöst werden, wenn ensoviel Deformationsgleichungen aufgestellt werden können, als stasche Grössen unbekannt sind. Die Gleichungen zur Bestimmung der Inteationskonstanten müssen natürlich noch ausserdem vorhanden sein.

1) Ob und in welcher Weise sich dieses Gesetz praktisch verwirklichen st, bleibt hierbei unerörtert.

Andere Ableitung der Biegungslinie.

59. Die folgende Betrachtung möge zur Vervollständigung des Einblicks in den Zusammenhang zwischen den biegenden Kräften und den Eigenschaften der Biegungslinie sowie als Vorbereitung für § 63 dienen.

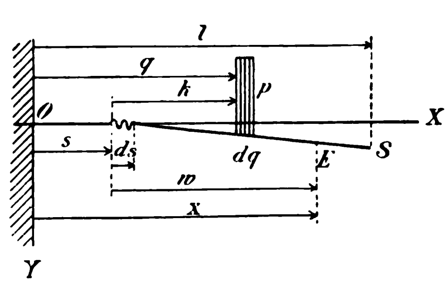


Fig. 31.

In Fig. 31 sei OS die Biegungslinie eines Stabes, dessen Elastizität sich auf das Element ds beschränkt, und welcher nur in dem Element dq durch die Kraft $\mathrm{d}P = p\,\mathrm{d}q$ belastet ist. Hiermit entsteht in dem elastischen Element nach (157) der Biegungswinkel

$$\mathrm{d}^2\beta = \frac{\mathrm{d}M}{EJ}\,\mathrm{d}s = \frac{k\,\mathrm{d}P}{EJ}\,\mathrm{d}s = \frac{kp}{EJ}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}s\,,$$

sonach für alle rechts von ds liegenden Punkte, z. B. für den Punkt E mit der Abszisse x eine ebenso grosse Neigung der Stabachse und eine Senkung

$$\mathrm{d}^2y = w\,\mathrm{d}^2\beta = \frac{wkp}{EJ}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}s\,,$$

unter w den Abstand der (senkrechten) Verschiebungslinie des Punktes E von dem elastischen Element verstanden, eine Grösse, die wir **Wirkungsarm** nennen wollen.

Die elastischen Wirkungen $\mathrm{d}^2\beta$ und d^2y stellen den **Einfluss** des belasteten Elements dq und des elastischen Elements ds auf den Punkt E dar. Es sind unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung.

Bei einem überall belasteten prismatischen Stab ist für ein elastisches Element mit der Abszisse s das Gesamtmoment

$$M = \int_{q=s}^{q=l} kp\,\mathrm{d}q\,,$$

also der Gesamteinfluss von ds auf E:

$$\mathrm{d}\beta = \frac{\mathrm{d}s}{EJ}\int_{q=s}^{q=l} kp\,\mathrm{d}q\,,$$

$$\mathrm{d}y = \frac{w\,\mathrm{d}s}{EJ}\int_{q=s}^{q=l} kp\,\mathrm{d}q\,.$$

Nach Fig. 31 ist $k = q - s$, $w = x - s$. Ist ferner $p = \mathrm{F}(q)$ gegeben, so erhält man $\mathrm{d}\beta$ und $\mathrm{d}y$ als Funktionen von s. Integriert man diese von $s = 0$ bis $s = x$, so ergeben sich die elastischen Wirkungen β und y, welche durch den ganzen Stab hervorgebracht werden, zu

$$\beta = \frac{1}{EJ}\int_{s=0}^{s=x}\mathrm{d}s\int_{q=s}^{q=l} kp\,\mathrm{d}q = \frac{1}{EJ}\int_{s=0}^{s=x}\mathrm{d}s\int_{q=s}^{q=l}(q-s)p\,\mathrm{d}q\,, \tag{197}$$

$$y = \frac{1}{EJ}\int_{s=0}^{s=x} w\,\mathrm{d}s\int_{q=s}^{q=l} kp\,\mathrm{d}q = \frac{1}{EJ}\int_{s=0}^{s=x}(x-s)\,\mathrm{d}s\int_{q=s}^{q=l}(q-s)p\,\mathrm{d}q\,. \tag{198}$$

Für eine konzentrierte Belastung ist, wenn b deren Entfernung von O ist, $k = b - s$, also das biegende Moment in $\mathrm{d}s$

$$M = K(b-s)\,,$$

demnach

$$\beta = \frac{K}{EJ}\int_{s=0}^{s=x}(b-s)\,\mathrm{d}s\,, \tag{199}$$

$$y = \frac{K}{EJ}\int_{s=0}^{s=x}(x-s)(b-s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{200}$$

Die einfachsten Fälle der Biegung des einseitig fixierten prismatischen Stabes.

§ 60. Das biegende Moment in $\mathrm{d}s$ für eine verteilte Belastung und eine konzentrierte Kraft ist

$$M = \int_{q=s}^{q=l}(q-s)p\,\mathrm{d}q + K(b-s)\,.$$

Um den für die Beurteilung der Festigkeitsgefahr wichtigen Maximalwert von M zu finden, hat man im allgemeinen $\frac{dM}{ds} = 0$ zu bilden Ergibt diese Gleichung einen Wert für s zwischen 0 und l, für welchei $\frac{d^2M}{ds^2}$ negativ ist, so ist daselbst M ein Maximum. Andernfalls kann ei solches nur im Befestigungsquerschnitt des Stabes, d. h. bei $s = 0$ vorkommen.

Die in Fig. 30 angenommene Beziehung des Stabes auf ein feste Koordinatensystem wird näherungsweise durch Festklemmen oder Einspannei in einen Schraubstock oder durch Einmauern verwirklicht. Eine solch Befestigung ist in den Figuren 31 bis 35 angedeutet, doch soll hiermi lediglich ausgedrückt werden, dass auf den links von O liegenden Teil de Stabes die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlichen Kräfte wirken die wir, ohne näher auf ihre Lage und Grösse einzugehen, als Befestigungskräfte bezeichnen. Auch auf den Deformations- und Spannungszustand des links von O liegenden Stabteiles sollen sich die folgenden Ausführungen nicht erstrecken. Die Entwickelung der tabellarisch zusammengestellten Gleichungen kann sowohl nach § 58 wie nach § 59 erfolgen.

M ist das Moment in einem elastischen Element $x = s$,

β und y sind die elastischen Wirkungen in einem Punkte x der Biegungslinie, bezogen auf das Koordinatensystem XY,

$\mathfrak{S}$ ist die grösste Spannung im Stab, d. h. σ_a für das grösste Moment nach (163).

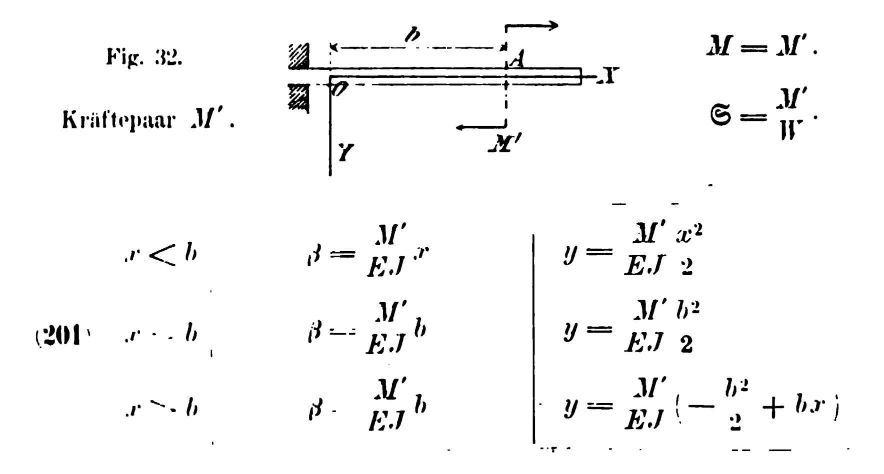


Fig. 32.

Kräftepaar M'.

$$M = M'. \qquad \mathfrak{S} = \frac{M'}{W}.$$

(201)

$x < b$	$\beta = \frac{M'}{EJ}x$	$y = \frac{M'}{EJ}\frac{x^2}{2}$
$x = b$	$\beta = \frac{M'}{EJ}b$	$y = \frac{M'}{EJ}\frac{b^2}{2}$
$x > b$	$\beta = \frac{M'}{EJ}b$	$y = \frac{M'}{EJ}\left(-\frac{b^2}{2} + bx\right)$

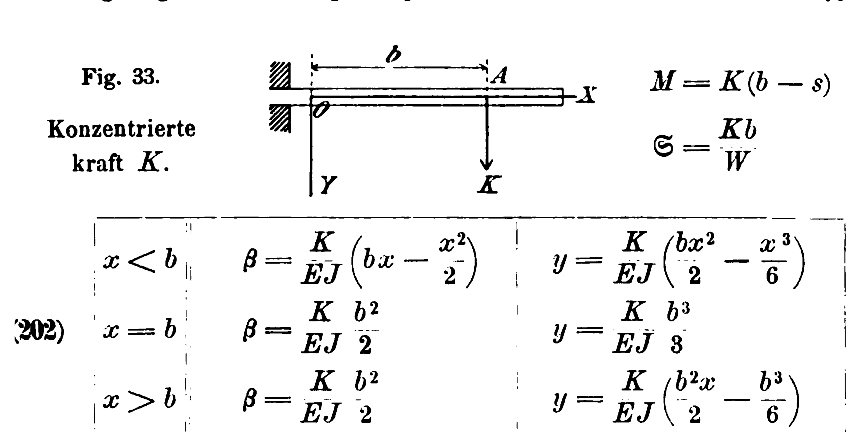


Fig. 33.

Konzentrierte kraft K.

$$M = K(b - s)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{Kb}{W}$$

(202)	$x < b$	$\beta = \frac{K}{EJ}\left(bx - \frac{x^2}{2}\right)$	$y = \frac{K}{EJ}\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$
	$x = b$	$\beta = \frac{K}{EJ}\frac{b^2}{2}$	$y = \frac{K}{EJ}\frac{b^3}{3}$
	$x > b$	$\beta = \frac{K}{EJ}\frac{b^2}{2}$	$y = \frac{K}{EJ}\left(\frac{b^2x}{2} - \frac{b^3}{6}\right)$

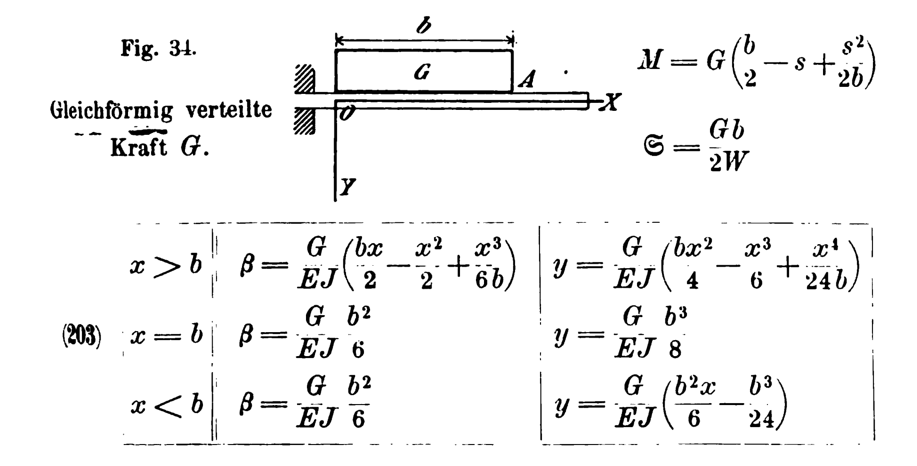


Fig. 34.

Gleichförmig verteilte Kraft G.

$$M = G\left(\frac{b}{2} - s + \frac{s^2}{2b}\right)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{Gb}{2W}$$

(203)	$x > b$	$\beta = \frac{G}{EJ}\left(\frac{bx}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6b}\right)$	$y = \frac{G}{EJ}\left(\frac{bx^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24b}\right)$
	$x = b$	$\beta = \frac{G}{EJ}\frac{b^2}{6}$	$y = \frac{G}{EJ}\frac{b^3}{8}$
	$x < b$	$\beta = \frac{G}{EJ}\frac{b^2}{6}$	$y = \frac{G}{EJ}\left(\frac{b^2x}{6} - \frac{b^3}{24}\right)$

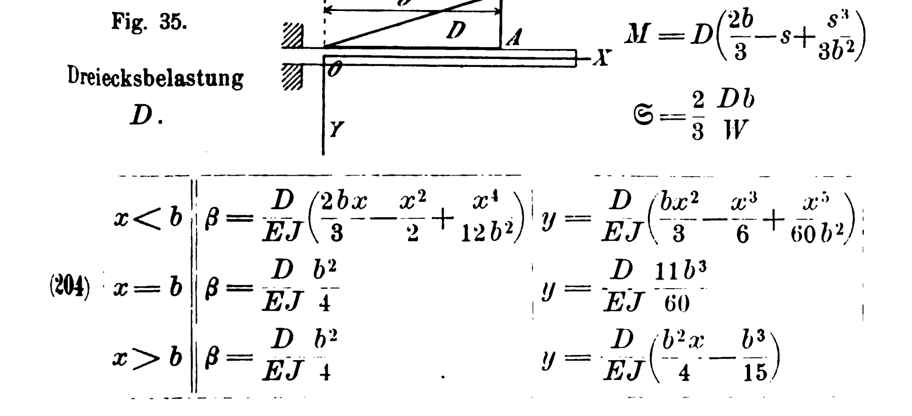


Fig. 35.

Dreiecksbelastung D.

$$M = D\left(\frac{2b}{3} - s + \frac{s^3}{3b^2}\right)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{2}{3}\frac{Db}{W}$$

(204)	$x < b$	$\beta = \frac{D}{EJ}\left(\frac{2bx}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12b^2}\right)$	$y = \frac{D}{EJ}\left(\frac{bx^2}{3} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60b^2}\right)$
	$x = b$	$\beta = \frac{D}{EJ}\frac{b^2}{4}$	$y = \frac{D}{EJ}\frac{11b^3}{60}$
	$x > b$	$\beta = \frac{D}{EJ}\frac{b^2}{4}$	$y = \frac{D}{EJ}\left(\frac{b^2x}{4} - \frac{b^3}{15}\right)$

Mehrfache Biegungsbelastung prismatischer Stäbe.

§ 61. Besteht die Belastung aus den Kräftepaaren M_1, M_2 ... den konzentrierten Kräften K_1, K_2 ..., den gleichförmig verteilten Kräften G_1, G_2 ..., und den Dreieckslasten D_1, D_2 ..., so kann für jeden dieser Belastungsteile, gleichviel ob er bestimmt oder unbestimmt ist, der Einfluss auf β und y für irgend einen Punkt E mit der Abszisse x nach (201) bis (204) berechnet werden. Bezeichnet man die algebraische Summe der Teilwerte für β und y mit $\Sigma\beta$ und Σy, so sind die Gesamtwirkungen in E

$$\beta_e = \Sigma\beta\,, \qquad y_e = \Sigma y\,. \tag{205}$$

Ist β_e oder y_e bekannt, so können die Gleichungen (205) dazu dienen, je eine unbekannte Belastungsgrösse zu berechnen. Wäre z. B. der Punkt E durch eine feste Stütze gehindert sich zu senken, so ist $y_e = 0$. Wäre der Stab in E nicht nur gestützt, sondern gehindert sich zu drehen, so wäre $\beta_e = 0$. Die beiden damit aus (205) entstehenden Gleichungen $\Sigma\beta = 0$, $\Sigma y = 0$ würden dazu dienen können, die Stützreaktion K_e und das Reaktionsmoment M_e zu finden, falls dies die einzigen unbekannten statischen Grössen sind. Sind mehr als zwei Belastungsgrössen unbekannt, so müssen auch entsprechend mehr geometrische Grössen β oder y bekannt sein, um die statische Unbestimmtheit zu beseitigen.

Bei der Aufstellung der Gleichungen ist zu beachten, dass die Gleichungen (150) und (151) auch für den ganzen Stab gelten, d. h. für einen Schnitt in der freien Endfläche. Da hier $\tau_{xy} = 0$ und $\sigma_x = 0$ ist, so folgt

$$\int_0^l p_y ds + \sum_0^l K_y = 0\,, \tag{206}$$

$$\int_0^l p_y k ds + \sum_0^l K_y k = 0\,. \tag{207}$$

Das zweite Glied der Gleichung (206) kann auch unbekannte Kräfte (Reaktionen), das zweite Glied der Gleichung (207) auch unbekannte Momente enthalten. Sind überhaupt nur 2 statische Grössen nicht unmittelbar gegeben, so können diese aus (206) und (207) berechnet werden. Das ist z. B. der Fall, wenn ein Stab auf zwei Stützen ruht, und bis auf deren Reaktionen alle Kräfte bekannt sind, oder, wenn er in einem Punkte festgeklemmt ist, woselbst eine unbekannte Reaktionskraft und ein unbekanntes Reaktionsmoment wirken.

Wenn diese beiden Gleichungen der allgemeinen Mechanik zur Bechnung der unbekannten Reaktionen genügen, so pflegt man (s. § 58) die ufgabe nicht „statisch unbestimmt“ zu nennen. Erst wenn mehr als 2 Re:tionen vorhanden sind, müssen Deformationsgleichungen zu Hilfe geommen werden. Die Zahl dieser Gleichungen bestimmt den Grad der atischen Unbestimmtheit. Ein auf drei Stützen ruhender Stab ist daher nfach statisch unbestimmt, ebenso ein an einem Ende festgeklemmter und einem zweiten Punkte unterstützter Stab. Ein an beiden Enden fest:klemmter Stab ist hingegen zweifach statisch unbestimmt.

Ruht ein Stab auf n, ihrer Lage nach bekannten, Punkten, so ist er $\imath - 2$) fach statisch unbestimmt. Da man 2 Punkte der elastischen Linie :nnen muss, um die Integrationskonstanten zu berechnen (s. § 58), so :rbleiben $n - 2$ Stützpunkte zur Aufstellung der nötigen Deformationsleichungen. Mit (206) und (207) hat man also n Gleichungen für n eaktionen.

Sind die Kräfte symmetrisch gruppiert, so empfiehlt es sich, den Kordinatenanfang in die Symmetrieachse zu legen, da hier $\beta = 0$ bleibt. ındernfalls legt man O am besten an einen Endpunkt und führt den Winkel, ım welchen sich das Koordinatensystem dreht, als Unbekannte ein.

Das hiermit in seinen Grundzügen geschilderte Verfahren lässt sich uch auf solche Fälle ausdehnen, in denen verteilte Belastungen vorkommen, lie einem beliebigen Gesetz folgen, kann man doch jede Belastungskurve $p = F(q)$ in kleine Trapeze und diese wieder in Dreiecke und Rechtecke zerlegen. Für solche Fälle wird jedoch das Verfahren umständlich, und es empfiehlt sich dann mehr das graphische Verfahren.

Graphische Ermittelung der Biegungslinie.

§ 62. Ist in Fig. 36 die Kurve $p = F(q)$ gegeben, so kann die Summe aller rechts von dem elastischen Element ds liegenden Kräfte

$$T = \int_{q=s}^{q=l} p\,dq \tag{208}$$

ls Ordinate der Integralkurve [1]) zu jener dargestellt werden.

Hat der Stab, wie hier angenommen werde, ein freies Ende, so be-

1) Das Verfahren zur Konstruktion der Integralkurve, welches hier als bennt vorausgesetzt wird, ist in Fig. 36 angedeutet.

ginnt man den Zug der Integralkurve am besten an diesem Ende, indem man die mit (208) identische Form

$$T = \int_{q=l}^{q=s} p\,(-\,\mathrm{d}q)$$

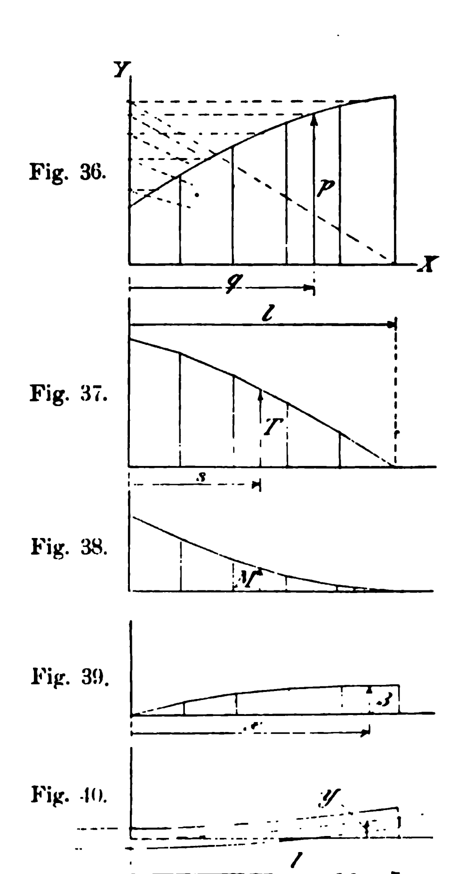


Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 39.

Fig. 40.

zu Grunde legt.

Um eine Beziehung zwischen T und M herzuleiten, sei M das Moment, welches in der Schnittfläche zur Abszisse s wirkt, und welches das in Fig. 41 dargestellte elastische Element ds rechts zu drehen sucht. Ihm entgegen wirkt in der Fläche zur Abszisse $s + \mathrm{d}s$ ein Moment $M + \frac{\partial M}{\partial s}\mathrm{d}s$. Wählt man die neutrale Linie des rechten Querschnitts als Achse für eine Momentengleichung, so wirkt T

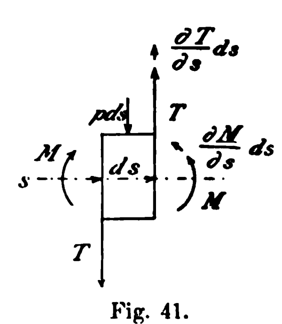


Fig. 41.

am Hebelarm ds und pds am Hebelarm $\frac{\mathrm{d}s}{2}$. Man erhält also

$$-\frac{\partial M}{\partial s}\mathrm{d}s - T\mathrm{d}s + p\frac{\mathrm{d}s^2}{2} = 0$$

oder, da das letzte Glied niederer Grössenordnung ist,

$$(209) \qquad \frac{\partial M}{\partial s} = -T, \qquad M = \int_{s=l}^{s=s} T\,(-\,\mathrm{d}s).$$

Hiernach kann M als Ordinate der zweiten, d. h. von Fig. 37 abge-

eiteten Integralkurve Fig. 38 konstruiert worden, beginnend im Endpunkt von l.

Unter dem Einfluss des Schnittmomentes vollzieht sich in jedem elastischen Element ds eine unendlich kleine Wendung. Diese ist nach (161)

$$d\beta = \frac{M}{EJ} ds ,$$

und wird von jedem rechts von ds liegenden Punkte des Stabes mitgemacht. Ist daher x die Abszisse eines solchen Wirkungspunktes, so ist für ihn die Wendung im Ganzen

$$\beta = \int_{s=0}^{s=x} \frac{M}{EJ} ds \tag{210}$$

oder, wenn EJ konstant ist (prismatischer Stab),

$$\beta = \frac{1}{EJ} \int_{s=0}^{s=x} M ds . \tag{211}$$

Man findet hiernach β als dritte Integralkurve Fig. 39, welche im Koordinatenanfang beginnt.

Nach (195) ist ferner

$$dy = \beta dx ,$$

mithin

$$y = \int_{x=0}^{x=x} \beta dx . \tag{212}$$

Man findet also y als Ordinate der vierten Integralkurve Fig. 40, welche im Koordinatenanfang zu beginnen ist.

Der Massstab für die Ordinaten dieser vier Integralkurven ist, wie derjenige der Belastungskurve, beliebig und kann mit Rücksicht auf zeichnerische Bequemlichkeit gewählt werden. Hierdurch wird es möglich, die Biegungslinie mit 10- oder 100fach vergrösserten Ordinaten zur Darstellung zu bringen, wodurch ihre Form trotz der in Wirklichkeit meist sehr geringen Abweichung von der Geraden deutlich hervortritt.

Die Kurven für T und M sind aus der graphischen Statik bekannt und werden dort gewöhnlich als Kurve der Scherkraft und als Seilpolygon bezeichnet. Kommen ausser der verteilten Belastung konzentrierte Kräfte vor, so kann man sie durch eine auf kurze Strecke verteilte Belastung ersetzen, was übrigens auch der Wirklichkeit entspricht. Eine konzentrierte Last erscheint dann in der T-Kurve als schmales Rechteck, während sie

bei strenger Festhaltung des Begriffes zu einer unendlich langen Linie zusammenschrumpfen würde.

Da für konzentrierte Kräfte die Rechnung der Spannungen und Deformationen einfach ist, so kann man übrigens für diese das Rechnungsverfahren beibehalten und die durch sie bewirkten Einflüsse zu den graphisch gefundenen addieren.

In gleicher Weise würde mit unbestimmten Kräften zu verfahren sein. Nur würde man sie als Unbekannte einführen, um sie eventuell aus geometrischen Bedingungen zu berechnen.

Ein halb graphisches, halb rechnerisches Näherungsverfahren zur Lösung hierher gehöriger Aufgaben wird, da es eine allgemeinere Anwendbarkeit besitzt, bei der Biegung krummer Stäbe zur Sprache kommen.

Ist der Stab nicht prismatisch, so ist J eine Funktion von s. Dieser Umstand kann in der Weise berücksichtigt werden, dass in Fig. 38 ausser M noch die Grösse $\frac{M}{J}$ als Ordinate aufgetragen wird.

V. Abschnitt.

Die Biegungsfestigkeit krummer Stäbe.

Ebene Biegung eines einfach gekrümmten dünnen Stabes. Wirkung eines elastischen Elements.

§ 63. In Fig. 42 sei die Kurve FP die Zentrallinie eines einfach ge-·ümmten elastischen Stabes von symmetrischem Querschnitt. Die Rich-.ng, welche durch die Reihenfolge der Punkte F und P im Sinne einer ·ewegung längs der Kurve gekennzeichnet wird, heisse die Laufrichtung ·r Kurve.

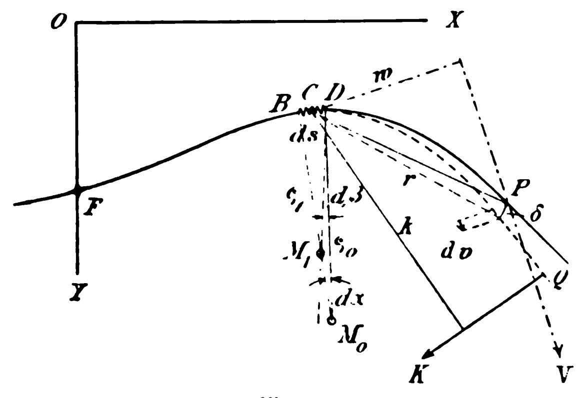


Fig. 42.

Nach dieser (zunächst willkürlichen) Annahme können die für einen lusslauf gebräuchlichen Begriffe „oben, unten, rechts, links“ in dem in ·r Geographie üblichen Sinne für den Kurvenlauf verwandt werden.

Wendet sich die Kurve beim Vorwärtsschreiten in das rechte Feld der ·rausgehenden Tangente, so werde sie als rechtswendig, im entgegen-esetzten Falle als linkswendig bezeichnet. Bei einer rechtswendigen .urve liegt der Krümmungsmittelpunkt rechts, bei einer linkswendigen

links. Der Krümmungsradius gelte im rechten Felde als positiv, im linken als negativ.

Wird ferner ein Kurvenelement ds in der Laufrichtung positiv gezählt, und bezeichnet $d\alpha$ den zugehörigen Kontingenzwinkel, d. h. auch den Winkel zwischen den Grenznormalen von ds, so ist, wenn die bekannte Gleichung

$$ds = \varrho d\alpha \tag{213}$$

gelten soll, der positive Sinn von $d\alpha$ in Übereinstimmung mit ϱ zu nehmen. Hiernach wird die Krümmung der Kurve $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ positiv, wenn diese rechtswendig, negativ, wenn sie linkswendig ist. Bezieht man eine solche Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem in ihrer Ebene, so würde für eine starre Kurve die Festlegung zweier Punkte genügen, um sie relativ unbeweglich zu machen. Diese Punkte können auch unendlich nahe benachbart sein, oder mit andern Worten, es kann für ein Element der Kurve Lage und Richtung gegeben sein. Ein solcher Doppelpunkt heisse Fixpunkt der Kurve im Koordinatensystem. Für die Lage des Koordinatensystems werde hier noch angenommen, dass der Winkel, welchen der Halbstrahl $+X$ beschreibt, um mit $+Y$ in Deckung zu kommen, von $+Z$ aus gesehen, ein rechtswendiger sei.

Unter Bezugnahme auf diese Voraussetzungen und Vereinbarungen sei F der Fixpunkt der Kurve FP im Koordinatensystem. Da die Kurve aber die Zentrallinie eines elastischen Stabes ist, so ist hierdurch die gegenseitige Unbeweglichkeit nur für das Element in F gesichert, während alle andern Punkte sich mehr oder weniger aus ihrer spannungslosen Lage entfernen können. Um die hierbei stattfindenden Gesetze zu erkennen, denken wir uns den Stab wie bei Fig. 31 aus einer stetigen Reihe elastischer Elemente bestehend und untersuchen den bewegenden Einfluss oder die Wirkung der Biegung eines dieser Elemente ds (in Fig. 42 als Wellenlinie gezeichnet) auf irgend einen andern Punkt P der Zentrallinie, indem wir zunächst alle andern Elemente als starr betrachten. Das Element zerlegt den Stab in einen oberen Teil und einen unteren Teil, und man erkennt, dass ds auf die Punkte des Oberteils keine Wirkung hat. Die Unbeweglichkeit erstreckt sich auch noch auf den Querschnitt B, welcher die Grenze zwischen dem Oberteil und dem Element ds bildet, demnach auch auf die in der Krümmungsebene liegende Hauptnormale. Stellt z. B. BD das Element ds dar, so würde, wenn M_0 der Krümmungsmittelpunkt vor der elastischen Biegung ist, BM_0 in Ruhe bleiben, während der durch D gehende Krümmungsradius durch die Biegung eine kleine Wendung erleidet.

welche den Krümmungsmittelpunkt von M_0 nach M_1 rückt. Die Grösse dieser Wendung lässt sich offenbar durch den Unterschied der Zentriwinkel $BM_1D - BM_0D$ oder $\frac{ds}{\varrho_1} - \frac{ds}{\varrho_0}$ ausdrücken. Nennen wir wie früher diesen elementaren Biegungswinkel $d\beta$, so ist also

$$d\beta = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0}\right) ds,$$

und der spezifische, d. h. auf die Längeneinheit der Zentrallinie bezogene Biegungswinkel ist die Beugung (s. § 53)

$$B = \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0}, \tag{214}$$

eine die geometrische Natur des Biegungszustandes in ds ausdrückende Grösse. Der Biegungswinkel des Querschnitts in D

$$d\beta = B\,ds$$

ist offenbar gleichzeitig der Winkel, um welchen sich der unterhalb ds liegende Stabteil infolge der Biegung dieses Elements dreht. In Anbetracht, dass ds jeder endlichen Länge gegenüber vernachlässigt werden darf, besteht also die elastische Wirkung von ds in einer Drehung des unteren Stabteiles um einen Punkt, als welcher beim Ersatz von ds durch eine kleine endliche Strecke der Mittelpunkt C von ds angenommen werden kann. Hierdurch erhält jeder dem unteren Stabteil angehörige Punkt P eine lineare Bewegung δ, welche dem Abstand PC proportional ist und, mit der Abkürzung $PC = r$,

$$\delta = r\,d\beta = rB\,ds \tag{215}$$

gesetzt werden kann.

Wirkung des ganzen Stabes.

§ 64. In derselben Weise wie das eine Element ds wirken auf den Punkt P sämtliche oberhalb von ihm gelegene Elemente. Würden dieselben nicht gleichzeitig, sondern nach einander zur Wirkung gelangen, so beschriebe der Punkt P einen aus unendlich vielen δ zusammengesetzten Weg von endlicher Grösse. Während dieser Weg von der Reihenfolge abhängig ist, in welcher die Stabelemente zur elastischen Wirkung gelangen, ist be-

kanntlich der Abstand der Endpunkte von Δ als geometrische Summe nach Grösse und Richtung hiervon unabhängig.

Hätten sämtliche δ gleiche Richtung, so wäre der Weg des Punktes P eine Gerade, die geometrische Summe aber eine algebraische. Letzteres gilt aber auch für die nach bestimmter Richtung genommenen Komponenten der δ, für deren Grösse ein leicht zu übersehender Ausdruck angegeben werden kann. Wäre z. B. der Strahl V Fig. 42 als Vektor im Sinne des Pfeiles eine solche Komponentenrichtung und P ein in dem Vektor liegender Punkt der elastischen Linie, so hat der Biegungsweg δ in Richtung V die Komponente $\delta \sin(Vr)$ oder, nach (215), $r \sin(Vr) B \mathrm{d}s$. Da aber $r \sin(Vr)$ das von C auf V gefällte Lot w ist, so erhält man für die Komponente $\mathrm{d}v$ des Weges δ den Ausdruck

$$\mathrm{d}v = wB\mathrm{d}s$$

und für den ganzen Weg v, wenn s eine vom Fixpunkt an gerechnete Bogenlänge, s_p die Bogenlänge FP bedeutet

$$v = \int_{s=0}^{s=s_p} wB\mathrm{d}s \,. \tag{216}$$

w werde, wie in § 59, bezeichnet als **Wirkungsarm eines elastischen Elements, bezogen auf den Vektor** V. Derselbe ist unter den gemachten Annahmen positiv, wenn das elastische Element beim Blick in der Richtung des Vektors rechts von V liegt, im andern Falle negativ.

Der Wechselfaktor.

§ 65. Die Beugung B ist abhängig, wie bereits vom geraden Stab bekannt, von dem **Schnittmoment** M, welches in dem Element $\mathrm{d}s$ herrscht, von der Gestalt und Grösse des Querschnittes daselbst und von dem Material. Für einen zur Biegungsebene symmetrischen Querschnitt hatte sich beim geraden Stab aus der Hypothese von **Hooke** und von **Bernoulli** ergeben (s. Gleichung (161))

$$B = \frac{M}{EJ} \,, \tag{217}$$

eine Beziehung, welche nicht ohne weiteres auf den gebogenen Stab angewandt werden darf, welche sich aber (vergl. § 117) als um so weniger

ungenau erweist, je grösser der Krümmungsradius ϱ_0 im Vergleich mit den in der Biegungsebene liegenden Querschnittsdimensionen ist. Für schwach gekrümmte, dünne Stäbe, um es kurz auszudrücken, darf daher Gleichung (217) angewandt werden[1]).

Ist sodann weiter M durch eine in Q, Fig. 42 angreifende Einzelkraft K im Abstand k von dem Element ds hervorgerufen, so ist (vergl. § 52) k der Krafthebelarm der biegenden Kraft und

$$M = Kk \tag{218}$$

das Schnittmoment, welches rechtsdrehend als positiv gilt. Der Kraftarm k ist daher positiv zu rechnen, wenn er für den Blick im Sinne des Kraftvektors rechts von diesem liegt.

Unter Zusammenfassung der Gleichungen (214), (217), (218), erhält man für den Biegungswinkel in P

$$\beta = \frac{K}{E}\int_{s=0}^{s=s_p,\,s_q} \frac{k}{J}\,ds\,, \tag{219}$$

und ferner folgt aus den Gleichungen (216), (217), (218)

$$v = \frac{K}{E}\int_{s=0}^{s=s_p,\,s_q} \frac{kw}{J}\,ds\,. \tag{220}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass sich die Integration nur über die elastisch wirksame Stablänge, d. h. nur auf diejenigen Stabelemente erstreckt, welche sowohl oberhalb des Angriffspunktes der Kraft wie oberhalb des auf seine elastische Wirkung untersuchten Punktes P liegen. Als obere Integrationsgrenze ist also die kürzere der beiden Längen vom Koordinatenanfang bis zum Angriffspunkte oder bis zum Wirkungspunkt einzuführen, was in (219) und (220) mit $s = s_p$, s_q angedeutet sein soll. Das Integral in (220) stellt eine geometrische Beziehung zwischen dem Stab und den Strahlen V und K dar, welche in Bezug auf beide durchaus symmetrisch ist. Hierdurch wird die später benutzte Benennung dieses Integrals als

1) Durch Anwendung der Laméschen Gleichungen (99) auf den gekrümmten Stab lässt sich zeigen, dass nur an der freien Oberfläche einachsige Spannung stattfinden kann, während innen zweiachsige Spannung herrscht. Die quer zur Stabachse gerichtete zweite Hauptspannung kann jedoch bei dünnen Stäben vernachlässigt werden.

Wechselfaktor (Bezeichnung $\mathfrak{W}$) begründet, auf die einstweilen hingewiesen werde (s. § 69). Mit dieser Abkürzung schreibt sich Gleichung (220)

$$v = \frac{K}{E}\mathfrak{W}. \tag{221}$$

Wirkung mehrerer biegenden Kräfte auf einen Punkt.

§ 66. Sind mehrere Kräfte K_1, K_2 ..... unterhalb des Koordinatenanfanges wirksam, so summieren sich deren Wirkungen in P nach V, und man erhält für die Verschiebungskomponente nach V aus (221)

$$v = \frac{1}{E}\left(K_1\mathfrak{W}_1 + K_2\mathfrak{W}_2 + \cdots\right). \tag{222}$$

Wendet man diese Gleichung auf zwei rechtwinklige Achsrichtungen X und Y an, so wird einmal $v = v_x$, das anderemal $v = v_y$. Aus beiden berechnet sich dann die Gesamtwirkung

$$\Delta = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Abgesehen von einigen einfachen Fällen, insbesondere solchen Formen der Zentrallinie, die sich aus geradlinigen oder kreisförmigen Teilen zusammensetzen, ist die geschlossene Integration der Gleichungen (219) und (220) sehr schwierig. Umso leichter ist jedoch eine halbgraphische Näherung, bei welcher für eine Kraft K folgendermassen zu verfahren ist:

Man zerlegt die als obere Integrationsgrenze in Betracht kommende Stablänge s_p oder s_q in eine je nach dem Genauigkeitsbedürfnis kleinere oder grössere Zahl gleicher Teile Δs, bezeichnet die auf die Mittelpunkte dieser Teile bezogenen k, w und J der Reihe nach mit k_1, k_2, k_3 ..., w_1, w_2, w_3 ..., J_1, J_2, J_3 ... und führt ihre aus einer Zeichnung zu entnehmenden Zahlenwerte in die sich aus Gleichung (219) und (220) ergebenden Näherungsgleichungen

$$\beta = \frac{K}{E}\left(\frac{k_1}{J_1} + \frac{k_2}{J_2} + \frac{k_3}{J_3} + \cdots\right)\Delta s, \tag{223}$$

$$v = \frac{K}{E}\left(\frac{k_1 w_1}{J_1} + \frac{k_2 w_2}{J_2} + \frac{k_3 w_3}{J_3} + \cdots\right)\Delta s \tag{224}$$

ein, welche symbolisch in der Form

$$\beta = \frac{K}{E} \sum \frac{k}{J} \Delta s \,, \tag{225}$$

$$v = \frac{K}{E} \sum \frac{kw}{J} \Delta s \tag{226}$$

eschrieben werden können.

Sind mehrere Kräfte vorhanden, so sind die von jeder einzeln hervorerufenen Wirkungen β und v zu summieren.

Wirkung in einigen Sonderfällen.

§ 67. Ist die Biegung nicht durch eine Einzelkraft, sondern durch ein im Punkte P angreifendes Kräftepaar vom Moment M' veranlasst, so ist das in allen Querschnitten oberhalb P herrschende Moment konstant. Man erhält daher, indem man in (225) und (226) Kk durch M' ersetzt

$$\beta = \frac{M'}{E} \sum \frac{1}{J} \Delta s \,, \tag{227}$$

$$v = \frac{M'}{E} \sum \frac{w}{J} \Delta s \,. \tag{228}$$

Für einen Stab von überall gleichem Querschnitt wird J konstant, darf also vor das $\int$ oder Σ gesetzt werden.

Ist der Angriffspunkt zugleich der untersuchte Punkt, so wird, wenn ausserdem noch die Vektoren V und K gleiche Richtungen haben, $w = k$.

Unter diesen beiden Voraussetzungen wird aus Gleichung (220)

$$v = \frac{K}{EJ} \int\limits_{s=0}^{s=s_p, s_q} k^2 ds \,. \tag{229}$$

Das Integral ist also hier das Trägheitsmoment des wirksamen Teiles der Stabmittellinie bezogen auf den Doppelstrahl K, V.

Bilden hingegen, unter übrigens gleichen Voraussetzungen, die Vektoren K und V einen rechten Winkel, so wird das Integral zu einem Zentrifugal- oder Deviationsmoment.

Wenn J konstant ist, erhält man für β die einfachen Ausdrücke

$$\beta = \frac{K}{EJ} \int\limits_{s=0}^{s=s_p \cdot s_q} k ds \,, \tag{230}$$

$$\beta = \frac{M'}{EJ} s \,. \tag{231}$$

Bei einer Einzelkraft kommt also hier das statische Moment der wirksamen Stabmittellinie bezogen auf den Kraftvektor, bei einem Moment lediglich die Stablänge in Betracht. In dem letzten Falle verhält sich ein beliebig gekrümmter Stab nicht anders als ein gerader von gleichem Querschnitt und gleicher Länge.

Wirkung stetig verteilter Kräfte.

§ 68. Um das hier geschilderte Verfahren auch auf stetig verteilte Kräfte anwenden zu können, zerlegt man die stetig belasteten Teile der Zentrallinie in endliche Elemente $(\Delta q)_1$, $(\Delta q)_2$ u. s. w. (s. § 59), und setzt $p_1(\Delta q)_1 = K_1$, $p_2(\Delta q)_2 = K_2$ u. s. w., unter K_1, K_2 u. s. w. Kräfte verstanden, welche die Richtung von p_1, p_2 ... haben und in den Mittelpunkten der endlichen Elemente angreifen.

Lässt sich p durch ein algebraisches Gesetz als Funktion der Koordinaten der Zentrallinie ausdrücken, so ergibt sich für ein belastetes Element dq die unendlich kleine Kraft $dK = p\,dq$, welche auf jedes oberhalb liegende elastische Element ds mit dem Kraftmoment

$$dM = k\,dK = kp\,dq$$

wirkt, wonach sich das Gesamtmoment für das elastische Element zu

$$M = \int_{q=s}^{q=l} kp\,dq \tag{232}$$

ergibt, unter l die ganze Länge der Zentrallinie verstanden, das Integral über sämtliche unterhalb des elastischen Elements liegende belastete Elemente ausgedehnt. Für die Beugung erhält man nach Gleichung (217) und unter den früheren Annahmen

$$B = \frac{1}{EJ}\int_{q=s}^{q=l} kp\,dq \tag{233}$$

als Funktion der Lage des elastischen Elements, deren Einfluss in der untern Integrationsgrenze zur Geltung kommt.

Hiermit ergibt sich aus Gleichung (216) die Verschiebungskomponente, also

$$v = \frac{1}{EJ}\int_{s=0}^{s=s_p} w\,ds \int_{q=s}^{q=l} kp\,dq\,, \tag{234}$$

wobei die Integration nach s auf sämtliche oberhalb P liegende elastische Elemente auszudehnen ist.

Die Maxwellsche Vertauschung.

§ 69. Aus der Form der Gleichung (220) ergibt sich noch ein sehr wichtiges Resultat. Offenbar haben k und w auf den Integralwert ganz gleichen Einfluss. Daher wird sich, insbesondere im Hinblick auf die in § 65 für die Integrationsgrenzen angegebene Regel, an dem Integralwert nichts ändern, wenn die Vektoren K und V vertauscht werden, wodurch die Kraftarme k in Wirkungsarme w übergehen und umgekehrt. Durch die Vertauschung wird daher auch v nicht geändert.

Auf diese interessante Beziehung hat zuerst Maxwell aufmerksam gemacht[1]). Man nennt sie daher den Maxwellschen Satz. Derselbe findet namentlich im Brückenbau Anwendung, um den Einfluss einer beweglichen Last auf die Wirkung in einem bestimmten Punkte darzustellen.

Der Satz hat übrigens eine viel weitere Giltigkeit als für den einseitig befestigten gebogenen Stab[2]). Um so nötiger ist es aber, hervorzuheben, dass er schon für die Biegung nur insoweit gilt, als die Hooke-Bernoullische Hypothese zutrifft. Andernfalles wäre statt k eine Funktion von k einzuführen, während w unberührt bleibt. Hierdurch aber würde die Vertauschbarkeit aufgehoben.

Ermittelung unbekannter Kräfte von bekannter Richtung.

§ 70. Die Anwendbarkeit der für den krummen Stab gefundenen Gleichungen ist eine sehr vielseitige. Da der gerade Stab nur ein Sonderfall des krummen ist, so lassen sich die Biegungserscheinungen des geraden Stabes aus den Gleichungen (219) und (220) ableiten, und es wäre daher nicht unbedingt nötig gewesen, diesen im voraus gesondert zu behandeln.

Die wichtigste Anwendung liegt auch hier in der Lösung statisch unbestimmter Aufgaben.

Wirken auf einen einseitig fixierten (geraden oder krummen) Stab die n Kräfte K_1, K_2 ..... K_m, so kann man durch Gleichungen von der Form (222) die Verschiebungen v_1, v_2 ... v_m ausdrücken, welche die An-

---

1) Maxwell, On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames. Philosophical Magazine. Vol. XXVII.

2) s. auch Föppl, Theoretische Mechanik, 3. Bd. § 30.

griffspunkte der Kräfte nach der Kraftrichtung erfahren. Hierbei muss der Wechselfaktor $\mathfrak{W}$ ausser dem bereits in Gleichung (222) angebrachten Kraftindex noch einen zweiten Index erhalten, um den Wirkungsstrahl zu kennzeichnen, auf welchen sich v bezieht. Wird dieser Index an zweiter Stelle geschrieben, so bedeutet z. B.

$$\mathfrak{W}_{12} = \int\limits_{s=0}^{s=s_q, s_p} \frac{kw}{J} \, ds \tag{235}$$

den Wechselfaktor für die Kraft K_1 und die Verschiebung v_2 des Angriffspunktes der Kraft K_2 nach ihrer Richtung, während der Wechselfaktor für K_2 und v_1 mit $\mathfrak{W}_{21}$ zu bezeichnen wäre. Da jedoch nach dem Maxwellschen Satze

$$\mathfrak{W}_{21} = \mathfrak{W}_{12} \tag{236}$$

ist, so ist die Vertauschung algebraisch stets zulässig; nur der Ordnung halber ist eine gewisse Reihenfolge, z. B. die in (235) benützte, zu empfehlen, welche auch in den folgenden Gleichungen innegehalten ist:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{E}\left(\mathfrak{W}_{11} K_1 + \mathfrak{W}_{21} K_2 + \ldots + \mathfrak{W}_{m1} K_m\right) \\ v_2 &= \frac{1}{E}\left(\mathfrak{W}_{12} K_1 + \mathfrak{W}_{22} K_2 + \ldots + \mathfrak{W}_{m2} K_m\right) \\ &\text{u. s. w.} \\ v_m &= \frac{1}{E}\left(\mathfrak{W}_{1m} K_1 + \mathfrak{W}_{2m} K_2 + \ldots + \mathfrak{W}_{mm} K_m\right). \end{aligned}\right| \tag{237}$$

Aus diesen m Gleichungen können m Unbekannte berechnet werden, z. B. sämtliche K, wenn die v und $\mathfrak{W}$ bekannt sind. Befinden sich unter den Kräften sogenannte Reaktionen starrer Widerlager, so ist für deren Angriffspunkte $v = 0$, also bekannt.

Eine mit (237) analog gebildete Reihe von Gleichungen für die Biegungswinkel in den m Punkten des Stabes ergibt sich aus (219). Ist der Stab in einem dieser Punkte verhindert, sich zu drehen, so ist daselbst $\beta = 0$, also ebenfalls bekannt.

Ist der Stab in einem zweiten Punkt eingeklemmt, d. h. fixiert wie in F, so ist daselbst für jede Richtung $v = 0$, ausserdem aber $\beta = 0$. In diesem Falle kann man die Befestigungskräfte durch eine Einzelkraft K und ein Kräftepaar vom Moment M' ersetzen. Der Einfluss dieses Reaktionsmoments auf $v_1, v_2 \ldots v_m$ und auf $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$ ergibt noch je ein Glied von der Form (227) und (228), welches zu den Wirkungen der Einzelkräfte zu addieren ist.

Ermittelung unbekannter Kräfte nach Grösse und Richtung.

§ 71. Ist eine Kraftrichtung unbekannt, so fehlen alle $\mathfrak{W}$, in denen deren Index vorkommt. Diese $\mathfrak{W}$ sind sonach unter die Unbekannten aufzunehmen und ev. aus den Gleichungen zu berechnen. Setzt man sodann ihren Zahlenwert in die Definitionsgleichung (235) ein, so ist es eine rein mathematische Aufgabe, den Winkel zu berechnen, welcher die Gleichung identisch macht. Meist dürfte es indessen vorteilhafter sein, eine der Richtung nach unbekannte Kraft durch zwei rechtwinklige Komponenten zu ersetzen, deren Wechselfaktoren ausgedrückt werden können, wodurch die Aufgabe auf den vorigen Fall zurückgeführt ist. Der hier behandelte Fall findet statt, wenn der Stab noch in einem Punkte drehbar befestigt ist. Hier sind also zwei unbekannte Kräfte zu ermitteln, während die Einklemmung drei Unbekannte ergibt.

Die Sätze von Castigliano.

§ 72. Für kleine Bewegungen können die in dem Wechselfaktor enthaltenen Werte k, w, J als konstant bleibend angesehen werden, wonach bei Zunahme einer Kraft K um $\mathrm{d}K$

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{E}\mathfrak{W}\mathrm{d}K \tag{238}$$

wird.

Befindet sich ein Stab unter der Wirkung von m Kräften K_1, K_2 . . K_m im Gleichgewicht, so hat seine elastische Energie (§ 42) eine gewisse Grösse U. Wird nun eine dieser Kräfte, z. B. K_1, um $\mathrm{d}K_1$ vergrössert, so hat dies eine Vergrösserung von U auf den Betrag

$$U + \frac{\partial U}{\partial K_1}\mathrm{d}K_1$$

zur Folge. Die Zunahme ist das Äquivalent der Arbeit $\mathrm{d}A$, welche infolge der Zunahme $\mathrm{d}K_1$ geleistet wird, und da sich im allgemeinen die Angriffspunkte sämtlicher Kräfte mit bewegen, so ist

$$\mathrm{d}A = K_1\mathrm{d}v_1 + K_2\mathrm{d}v_2 + \ldots + K_m\mathrm{d}v_m\,. \tag{239}$$

Hierbei ist das Glied $\frac{1}{2}\mathrm{d}K_1\mathrm{d}v_1$ als unendlich kleine Grösse 2. Ordnung vernachlässigt.

Nach Gleichung (238) sind aber die m Wirkungen von dK_1

$$dv_1 = \frac{1}{E}\mathfrak{W}_{11}dK_1, \quad dv_2 = \frac{1}{E}\mathfrak{W}_{12}dK_1, \; \ldots . \; dv_m = \frac{1}{E}\mathfrak{W}_{1m}dK_1,$$

also

$$dA = \frac{1}{E}(\mathfrak{W}_{11}K_1 + \mathfrak{W}_{12}K_2 + \ldots + \mathfrak{W}_{1m}K_m)\,dK_1. \tag{240}$$

Da nun

$$\frac{\partial U}{\partial K_1}\,dK_1 = dA, \tag{241}$$

so folgt aus (240) und (241) mit Vertauschung der Indices der $\mathfrak{W}$ nach (236)

$$\frac{\partial U}{\partial K_1} = \frac{1}{E}(\mathfrak{W}_{11}K_1 + \mathfrak{W}_{21}K_2 + \ldots + \mathfrak{W}_{m1}K_m). \tag{242}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der ersten der Gleichungen (237), so ergibt sich, dass die rechten Seiten identisch sind; es ist also

$$\frac{\partial U}{\partial K_1} = v_1. \tag{243}$$

Diese Gleichung ist einer der Sätze von **Castigliano**[1]). Ihr Sinn ist in Worten ausgedrückt der folgende:

Wenn man die elastische Energie U eines (geraden oder krummen) Stabes als Funktion der ihn belastenden Kräfte ausdrückt und nach irgend einer dieser Kräfte, z. B. nach K_1, partiell differenziert, so erhält man die Projektion der durch dK_1 bewirkten elastischen Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft auf deren Richtung.

Ein zweiter Satz ergibt sich, wenn man an dem unter den Kräften $K_1, K_2, \ldots . K_m$ im Gleichgewicht befindlichen Stab sämtliche Punkte 2 bis m hindert, sich nach der Kraftrichtung zu verschieben, im Punkte 1 jedoch eine unendlich kleine Verschiebung dv eintreten lässt. Offenbar ist jetzt dv_2 bis $dv_m = 0$, also die Arbeit lediglich

$$dA = K_1 dv_1.$$

Die durch dv_1 hervorgerufene mit dA gleiche Energiezunahme ist jetzt zu bezeichnen als

$$\frac{\partial U}{\partial v_1}\,dv_1.$$

Man erhält sonach, indem man diesen Ausdruck für dA setzt,

$$\frac{\partial U}{\partial v_1} = K_1, \tag{244}$$

in Worten:

1) s. S. 52.

Wenn man die elastische Energie U eines Stabes als Funktion der Verschiebungen $v_1, v_2, \ldots v_m$ ausdrückt, so erhält man durch partielles Differenzieren der Funktion U nach irgend einer dieser v die mit gleichem Index versehene Kraft.

Von den Castiglianoschen Sätzen ist der erste der wichtigere. In dem Falle nämlich, dass K_1 die unbekannte Reaktion eines Widerlagers, also $v_1 = 0$ ist, liefert

$$\frac{\partial U}{\partial K_1} = 0, \tag{245}$$

eine Gleichung, aus welcher K_1 berechnet werden kann. Der Wert von $\frac{\partial U}{\partial K_1}$ ist freilich nach (242) nichts anderes als die rechte Seite der Gleichung (237), zu deren Entwickelung weder der Umweg über den Begriff der Formänderungsarbeit noch deren partielle Differentiation nötig gewesen war.

Aber wenn auch hier ein unmittelbarer praktischer Vorteil im Rechnungsverfahren durch den Castiglianoschen Satz nicht zu erwarten ist, so ist derselbe doch wichtig genug, um hier mitgeteilt zu werden und zwar besonders deshalb, weil seine Giltigkeit innerhalb der Grenzen des Hookeschen Gesetzes eine sehr weitreichende ist, wie in dem S. 52 angeführten Werk nachgewiesen wird.

Noch ist zu bemerken, dass Gleichung (245) die Bedingung dafür angibt, bei welchem Wert K_1 die elastische Energie ein grösster oder kleinster Wert wird. Bildet man aus Gleichung (243) die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial K_1^2} = \frac{\partial v_1}{\partial K_1}, \tag{246}$$

so hat ∂v_1 mit ∂K_1 stets gleiche Richtung, ist also stets positiv. Demnach ist das aus (245) folgende U ein Minimum, und man nennt daher Gleichung (245) auch den Satz vom Minimum der elastischen Energie, wennschon diese Eigenschaft hier durchaus nebensächlich ist.

Anwendung des ersten Castiglianoschen Satzes.

§ 73. Um den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial K_1}$ in (245) auszudrücken, bedient man sich der Gleichung (189). Da sowohl S wie M eine Funktion von K_1 sein kann, so folgt nach (243)

$$(247)\qquad v_1 = \frac{1}{E}\left(\int\limits_{s=0}^{s=l}\frac{S}{F}\frac{\partial S}{\partial K_1}\,ds + \int\limits_{s=0}^{s=l}\frac{M}{J}\frac{\partial M}{\partial K_1}\,ds\right) = 0\,.$$

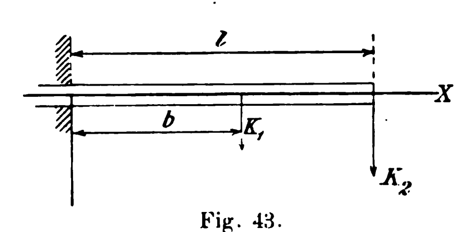


Fig. 43.

Für den in Fig. 43 dargestellten prismatischen Stab mit zwei Einzelkräften K_1 und K_2 ist überall $S = 0$, so dass das erste Glied verschwindet. Zerlegt man sodann das Integral in die Strecke 0 bis b und b bis l, so wird, da J konstant ist,

$$(248)\qquad v_1 = \frac{1}{EJ}\left(\int\limits_{s=0}^{s=b} M\frac{\partial M}{\partial K_1}\,ds + \int\limits_{s=b}^{s=l} M\frac{\partial M}{\partial K_1}\,ds\right).$$

Für $0 < s < b$ ist $M = K_1(b-s) + K_2(l-s)\,,\quad \frac{\partial M}{\partial K_1} = b - s,$

„ $b < s < l$ „ $M = \qquad K_2(l-s)\,,\quad \frac{\partial M}{\partial K_1} = 0\,.$

Hiermit gibt Gleichung (248)

$$v_1 = \frac{1}{EJ}\int\limits_{s=0}^{s=b}\left[K_1(b-s) + K_2(l-s)\right](b-s)\,ds$$

oder

$$v_1 = \frac{1}{EJ}\left(K_1\int\limits_{s=0}^{s=b}(b-s)^2\,ds + K_2\int\limits_{s=0}^{s=b}(l-s)(b-s)\,ds\right),$$

$$v_1 = \frac{1}{EJ}\left(K_1\frac{b^3}{3} + K_2\left(\frac{b^2 l}{2} - \frac{b^3}{6}\right)\right).$$

Wäre z. B. K_1 eine unbekannte Reaktion, also $v_1 = 0$, so folgt

$$(249)\qquad K_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\,l}{2\,b}\right)K_2\,.$$

Schon in diesem einfachen Falle gestaltet sich, wie man leicht finden wird, die Rechnung viel kürzer bei Benützung der Gleichung (237), und nach den tabellarischen Gleichungen (202) kann Gleichung (249) unmittelbar abgelesen werden.

Einfluss der Schnittkräfte auf die Formänderung des einfach gekrümmten Stabes.

§ 74.

In Fig. 44 sei λ der Winkel, um welchen die Richtung eines elasti-
hen Elements ds rechtswendig von der X-Achse abweicht, $\varkappa$ der in
icher Weise verstandene Win-
l einer Schnittkraft P, mit
lcher der Unterteil des Stabes
f das Element wirkt. Da
ernach $\varkappa - \lambda$ der Winkel
ischen P und ds ist, so
rd, wenn P in eine mit ds
rallele Zugkomponente S und
ne zu ds normale Schub-
ler Querkomponente T zerlegt
ird,

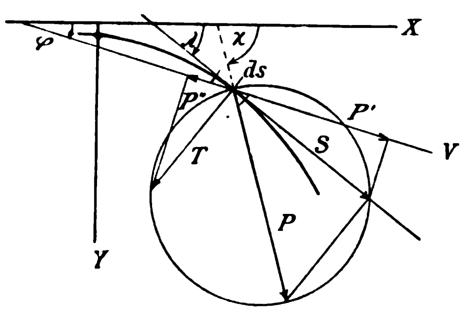


Fig. 44.

50) $$S = P\cos(\varkappa - \lambda)\,, \quad T = P\sin(\varkappa - \lambda)\,.$$

Unter dem Einfluss von S bewegt sich der untere Endpunkt von ds,
nn der obere festgehalten wird, in Richtung von ds um den Betrag der
hnung

51) $$\delta = \varepsilon\, ds = \frac{\sigma}{E}\, ds = \frac{S}{EF}\, ds\,,$$

ter F den Stabquerschnitt verstanden, und an dieser Bewegung nehmen,
es eine Parallelbewegung ist, sämtliche unterhalb ds liegende Punkte
s Stabes mit gleicher Grösse und Richtung teil.

Die von sämtlichen oberhalb eines untersuchten Punktes liegenden
stischen Elementen auf diesen bewirkten δ summieren sich, da sie unter
ander nicht parallel sind, zu einer geometrischen Summe Δ, während
auf irgend einen Strahl V projizierten Komponenten der δ sich zu einem
tegral vereinigen.

Ist φ der Winkel von V mit X, und dv die Projektion von δ auf
, so ist

$$dv = \delta\cos(\varphi - \lambda) = \frac{S}{EF}\cos(\varphi - \lambda)\, ds\,.$$

o die Gesamtwirkung nach V

52) $$v = \frac{1}{E}\int \frac{P}{F}\cos(\varkappa - \lambda)\cos(\varphi - \lambda)\, ds\,.$$

Der Ausdruck $P \cos(\varkappa - \lambda) \cos(\varphi - \lambda)$, welcher in Fig. 44 zur Abkürzung mit P' bezeichnet ist, wird, wie daselbst angegeben, leicht graphisch gefunden, indem P zunächst auf die Richtung von ds und von da weiter auf die Richtung V projiziert wird. Wird P' für eine hinreichende Anzahl Stabquerschnitte P' ermittelt und der Quotient $P' : F$ in den zugehörigen Punkten der zur Geraden gestreckten Stabmittellinie als Ordinate aufgetragen, so ist in dem Ausdruck

$$v = \frac{1}{E} \int \frac{P'}{F} \, ds , \tag{253}$$

das Integral die zwischen der entstehenden Kurve und der Abszissenachse liegende Fläche, die mit dem Planimeter leicht ermittelt werden kann.

Für den Einfluss der Transversalkräfte T erhält man analog mit Gleichung (252)

$$v = \frac{t}{G} \int \frac{P}{F} \sin(\varkappa - \lambda) \sin(\varphi - \lambda) \, ds \tag{254}$$

oder abgekürzt, s. Fig. 44

$$-v = \frac{t}{G} \int \frac{P''}{F} \, ds , \tag{255}$$

unter G den Gleitmodul verstanden, unter t das Verhältnis zwischen der wirklichen Querverschiebung und derjenigen, welche bei gleichmässiger Verteilung der Tangentialspannung über die sämtlichen Punkte eines Querschnittes entstehen würde (vergl. § 113), eine Zahl, welche von der Form des Querschnitts abhängt und zwischen 1 und 2,25 schwankt.

Die elastische Wirkung von S und T kann in vielen Fällen vernachlässigt werden. Nur bei Stäben, welche, wie z. B. flache Gewölbbögen, durch Kräfte von geringer Exzentrizität beansprucht werden, kann der Einfluss von S dem Einfluss der Biegungsmomente gegenüber (welche beim vollkommenen Gewölbe ganz verschwinden) eine beachtenswerte Grösse erreichen, während der Einfluss von T nur bei besonders kleinem Verhältnis der Länge zu den in der Biegungsebene liegenden Querdimensionen zu berücksichtigen ist, unter Umständen also, für welche alle hypothetischen Voraussetzungen der Biegungslehre so wenig genau zutreffen, dass die durch Berücksichtigung von T erstrebte höhere Genauigkeit in den meisten Fällen wegen anderer Fehler nur geringen Wert hat.

Einfluss der Temperatur auf die Formänderungen eines krummen Stabes.

§ 75. Nach Gleichung (137) ist die Verlängerung eines Stabes von der Länge s durch Erwärmen allein

$$\Delta s = \alpha s \Delta t ,$$

unter Δt die Zunahme der Temperatur verstanden. Die Verlängerung eines Längenelements ds ist daher

$$\Delta(ds) = \alpha(ds) \Delta t .$$

Bei gleichmässiger Erwärmung bleibt die Ausdehnungsfigur der ursprünglichen Form geometrisch ähnlich (s. § 5); irgend ein Punkt des Stabes verschiebt sich daher auf einer Geraden durch den Fixpunkt des Koordinatensystems. Ist dieser Fixpunkt Koordinatenanfang, und sind die rechtwinkligen Koordinaten x, y, der Radiusvektor r, so ist auch

$$\Delta x = \alpha x \Delta t , \qquad \Delta y = \alpha y \Delta t , \qquad \Delta r = \alpha r \Delta t . \tag{256}$$

Bei ungleichmässiger Temperatur ist der Stab in endliche Teile zu zerlegen und für jeden Teil Δx und Δy besonders zu berechnen. Aus der Summe der Δx und derjenigen der Δy findet sich der Weg eines Punktes nach Grösse und Richtung.

VI. Abschnitt.

Mehrachsiger Spannungszustand stabförmiger Körper.

Torsion eines geraden prismatischen Stabes von doppelt symmetrischem Querschnitt.

§ 76. Wenn die Resultante sämtlicher Spannkräfte eines Querschnittes auf ein Kräftepaar führt, dessen Achse wie die Stabachse gerichtet ist, so bezeichnet man die Belastung des Stabes in dem Querschnitt als reine Torsion (s. § 34).

Ist der Querschnitt doppelt-symmetrisch, wie z. B. in Fig. 45, so ergeben sich für die in homologen Punkten 1, 2, 3, 4 seiner vier Quadranten

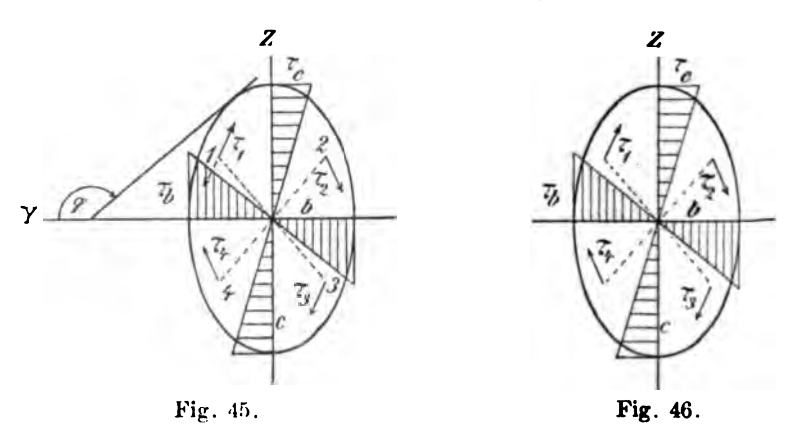


Fig. 45. Fig. 46.

entstehenden Tangentialspannungen gewisse Bedingungen, welche die Ermittelung des Spannungsgesetzes sehr erleichtern.

Da ein Querschnitt die Grenze zwischen 2 Stabteilen, einem unteren und einem oberen im Sinne von § 63, bildet, so kann Fig. 45 sowohl die Ansicht auf den einen Teil wie auf den andern Teil bedeuten. Wir denken uns die beiden Teile in der Schnittfläche getrennt und den unteren durch Fig. 45 so dargestellt, wie er vom oberen aus gesehen wird, den oberen

ber um 180° um die Z-Achse gedreht und in Fig. 46 so dargestellt, wie r von unten erscheint.

Sind in Fig. 45 τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 die Spannungen, mit denen der obere uf den unteren Teil wirkt, so empfängt ersterer von letzterem gleiche nd entgegengesetzt gerichtete Reaktionen. Eine derselben, nämlich die in wirkende Reaktion, ist in Fig. 45 so dargestellt, wie sie vom Oberteil us erscheint, wenn beide Teile noch zusammenhängen, und zwar, weil sie urch den Oberteil verdeckt ist, als punktierte Linie. In Fig. 46 ist diese eaktion durch die Drehung um Z in ihr Spiegelbild zu Z übergegangen; abei ist auch der Angriffspunkt 1 in die Spiegellage gelangt. Nun ist aber urchaus kein Grund vorhanden, warum das Kräftebild in Fig. 46 von dem n Fig. 45 verschieden sein sollte. Daher zeigt die Reaktion in Fig. 46 ugleich auch die Richtung und Grösse von τ_2 in Fig. 45 an. Überträgt nan diese Betrachtung auch auf die Punkte 3 und 4, so erkennt man, dass n symmetrischen Punkten die zur Symmetrieachse normalen Schubspannungskomponenten gleich und gleich gerichtet, die zu ihr parallelen Komponenten gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.

Für die Koordinaten der Punkte 1, 2, 3, 4 bestehen die Beziehungen:

$$(257) \quad \begin{cases} y_2 = -y_1, & y_3 = -y_1, & y_4 = y_1, \\ z_2 = z_1, & z_3 = -z_1, & z_4 = -z_1. \end{cases}$$

Für die Komponenten von τ, die hier bis § 81, weil nur X-schnittige vorkommen, zur Vermeidung dreier Indices neben dem Punktindex, nur mit dem Richtungsindex bezeichnet werden mögen, folgt aus der Symmetrie

$$(258) \quad \begin{cases} \tau_{2y} = \tau_{1y}, & \tau_{3y} = -\tau_{1y}, & \tau_{4y} = -\tau_{1y}, \\ \tau_{2z} = -\tau_{1z}, & \tau_{3z} = -\tau_{1z}, & \tau_{4z} = \tau_{1z}. \end{cases}$$

Einführung von Spannungsfunktionen mit unbestimmten Koeffizienten.

§ 77. Versucht man, τ_y und τ_z als Funktionen von y und z auszudrücken, elche je aus einer Reihe nach ganzen Potenzen von y und z fortschreitener Glieder bestehen, so können mit Rücksicht auf die Gleichungen (257) nd (258) nur solche Glieder in Frage kommen, welche die Eigenschaft aben, für symmetrische Punkte das Vorzeichen zu wechseln oder beizubealten, je nachdem die Symmetrieachse zur Richtung der Komponenten arallel oder normal ist.

Sämtliche Glieder in dem Ausdruck für τ_y müssen daher z in ungerader Potenz enthalten, während y nicht oder nur in gerader Potenz vorkommen darf. Hierdurch werden, bei Beschränkung auf Glieder von höchstens dem vierten Grade, ausgeschlossen:

für τ_y die Glieder mit y^2, z^2, yz, yz^2, y^3, y^4, z^4, y^2z^2, yz^3, y^3z,

für τ_x entsprechend die Glieder mit y^2, z^2, yz, y^2z, z^3, y^4, z^4, y^2z^2, yz^3, y^3z, so dass nur die dreigliedrigen Ausdrücke

$$(259) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_y &= (m + m_1 y^2 + m_2 z^2) z \,, \\ \tau_x &= (n + n_1 z^2 + n_2 y^2) y \end{aligned} \right.$$

übrig bleiben.

Spannungshypothese für die Symmetrieachsen.

§ 78. Bezeichnet man weiter die in den Symmetrieachsen Y, Z liegenden Durchmesser mit $2b$ und $2c$, die in den Endpunkten derselben herrschenden Spannungen aber mit τ_b und τ_c, so müssen dieselben, eine daselbst stetige Randlinie vorausgesetzt, zu b und c normal gerichtet sein (s. § 32). Macht man sodann die übliche, wenn schon anfechtbare Annahme[1]), dass die Spannungen τ_y^*, τ_x^* in den Punkten der Symmetrieachsen zu den Randspannungen parallel sind und sich verhalten wie die Abstände der Punkte vom Mittelpunkte (s. Fig. 45 und 46), so wird

$$(260) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_y^* &= \frac{z}{c} \tau_c \,, \\ \tau_x^* &= \frac{y}{b} \tau_b \,. \end{aligned} \right.$$

Da auch für die Achspunkte die Gleichungen (259) gelten, für die Z-Achse aber $y = 0$, für die Y-Achse $z = 0$ wird, so erhält man aus (259) und (260)

$$(261) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_y^* &= (m + m_2 z^2) z = \frac{\tau_c}{c} z \,, \\ \tau_x^* &= (n + n_2 y^2) y = \frac{\tau_b}{b} y \,, \end{aligned} \right.$$

oder

$$(262) \quad \left\{ \begin{aligned} m + m_2 z^2 &= \frac{\tau_c}{c} \,, \\ n + n_2 y^2 &= \frac{\tau_b}{b} \,. \end{aligned} \right.$$

1) S. Rud. Bredt, „Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität, Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing. 1896 S. 785 u. 813.

Die Erfüllung der Gleichungen (262) für alle möglichen Werte von z rischen $-c$ und $+c$ sowie für y zwischen $-b$ und $+b$ ist offenbar r möglich, wenn

$$m_2 = 0 \quad \text{und} \quad n_2 = 0\,, \tag{63}$$

$$m = \frac{\tau_c}{c}\,, \qquad n = \frac{\tau_b}{b} \tag{64}$$

t. Für einen beliebigen Querschnittspunkt folgt sodann nach (259)

$$\left\{\begin{aligned} \tau_y &= \left(\frac{\tau_c}{c} + m_1 y^2\right) z\,, \\ \tau_z &= \left(\frac{\tau_b}{b} + n_1 z^2\right) y\,. \end{aligned}\right. \tag{65}$$

Nimmt man ferner an, dass nicht nur $\int \sigma_x \, \mathrm{d}F = 0$ ist, was der Aufbe entspricht, sondern dass auch in allen Flächenelementen $\sigma_x = 0$, also ich $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$ ist, so folgt aus der ersten der Cauchyschen Gleichungen 4), sofern $k_x = 0$ und $\varphi_x = 0$ ist,

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0\,. \tag{66}$$

un ist aber nach den Gleichungen (265)

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 2 m_1 y z\,, \qquad \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 2 n_1 y z\,. \tag{67}$$

etzt man diese Werte in Gleichung (267) ein, so folgt

$$n_1 = - m_1\,, \tag{68}$$

ithin

$$\left\{\begin{aligned} \tau_y &= \left(\frac{\tau_c}{c} + m_1 y^2\right) z\,, \\ \tau_z &= \left(\frac{\tau_b}{b} - m_1 z^2\right) y\,. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Allgemeine Lösung.

§ 79. Eine Beziehung zwischen τ_b und τ_c ergibt sich aus Gleichung (306), n welcher hier schon im voraus Gebrauch gemacht werden muss. Sind l und $\mathrm{d}z$ Elemente von b und c, welche zwischen gleichen Schubspannungsrven liegen, so ist nach (306)

$$-\tau_y{}^* dz = \tau_x{}^* dy \,,$$

also nach (261)

$$-\frac{\tau_c}{c} z dz = \frac{\tau_b}{b} y dy \,,$$

und, von 0 bis b bezw. von 0 bis c integriert,

$$(270) \qquad -\tau_c c = \tau_b b \,.$$ [1]

Setzt man den hieraus folgenden Wert

$$\frac{\tau_c}{c} = -\left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{\tau_b}{b}$$

in (269) ein, so erhält man die allgemeinen Ausdrücke

$$(271) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tau_y &= \left[-\left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{\tau_b}{b} + m_1 y^2\right] z \,, \\ \tau_x &= \left[\qquad\quad \frac{\tau_b}{b} - m_1 z^2\right] y \end{aligned} \right.$$

für die Tangentialspannungen in einem beliebigen doppeltsymmetrischen Querschnitt. In diesen Gleichungen spielen nur noch τ_b und m_1 die Rolle von unbestimmten Koeffizienten; dieselben können aus der Form der Randlinie des Querschnittes und aus der Grösse des Schnittmoments abgeleitet werden.

Bezeichnet man die Koordinaten der Randlinie mit y_r und z_r, und ist $z_r = F(y_r)$ deren Gleichung, so ist mit Bezug auf Fig. 45

$$(272) \qquad \frac{dz_r}{dy_r} = \operatorname{tang} \varphi = \frac{\tau_x}{\tau_y} \,.$$

Während diese Gleichung die besondere Gestalt des Querschnitts in die Rechnung einführt, ergibt die Gleichung

$$(273) \qquad M_t = -\int \tau_y z dF + \int \tau_x y dF$$

das Schnittmoment des ganzen Querschnitts, dessen Gesamtwert bei statisch bestimmten Aufgaben als bekannt anzunehmen ist.

Die weitere Behandlung möge an zwei besonders wichtigen Querschnitten, der Ellipse und dem Rechteck gezeigt werden.

---

[1] Nach der älteren Theorie der Torsionsfestigkeit hätte sich in scharfem Gegensatz hierzu $-\tau_c b = \tau_b c$ ergeben. Man war dabei von einer der Bernoullischen Hypothese ähnlichen Deformationshypothese ausgegangen, die nur für solche Querschnitte mit der Erfahrung übereinstimmt, die sich wenig vom Kreis unterscheiden.

Der elliptische Torsionsquerschnitt.

§ 80.

Aus der Randgleichung der Ellipse

$$z_r^2 = c^2 - \left(\frac{c}{b}\right)^2 y_r^2$$

gt:

$$\frac{\mathrm{d}z_r}{\mathrm{d}y_r} = -\left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{y_r}{z_r}.$$

Setzt man diesen Wert in (272) ein und ersetzt τ_y und τ_z, welche in 72) Randwerte sind, durch die entsprechenden Ausdrücke aus (271) mit für y, z_r für z, so folgt weiter

$$\frac{\frac{\tau_b}{b} - m_1 z_r^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{\tau_b}{b} + m_1 y_r^2} = + \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

ler

$$m_1 \left(\frac{z_r}{c}\right)^2 = m_1 \left(\frac{y_r}{b}\right)^2.$$

Diese Gleichung wird für alle möglichen Werte von z_r und y_r nur füllt, wenn

$$m_1 = 0$$

t. Man erhält sonach aus (271) für den ganzen Querschnitt

$$74)\quad \begin{cases} \tau_y = -\left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{\tau_b}{b} z, \\ \tau_z = \frac{\tau_b}{b} y \end{cases}$$

ıd damit aus Gleichung (273)

$$M_x = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{\tau_b}{b} \int z^2 \mathrm{d}F + \frac{\tau_b}{b} \int y^2 \mathrm{d}F.$$

Für die Ellipse ist aber

$$\int y^2 \mathrm{d}F = \frac{\pi}{4} b^3 c, \qquad \int z^2 \mathrm{d}F = \frac{\pi}{4} b c^3,$$

ıach

$$M_x = \frac{\pi \tau_b}{4b}\left[\left(\frac{b}{c}\right)^2 b c^3 + b^3 c\right] = \frac{\pi}{2} b^2 c \tau_b.$$

o mit Benutzung von (270)

(275) $$\tau_b = \frac{2 M_r}{\pi b^2 c}, \qquad \tau_c = -\frac{2 M_r}{\pi b c^2}.$$

Ist, wie in Fig. 45 $c > b$, so ist τ_b der grösste im Querschnitt vorkommende Wert von τ.

Für den Kreis als Sonderfall der Ellipse mit $b = c = r$ erhält man

(276) $$\operatorname{Max} \tau = \frac{2 M_r}{\pi r^3}.$$

Während im Kreisquerschnitt die τ überall normal zu r gerichtet sind, ergibt im allgemeinen der Verlauf der τ geschlossene Kurven, welche nichts anderes sind als Schnitte von Netzflächen (s. § 30) mit dem Stabquerschnitt. Bezeichnen wir sie als **Schubspannungskurven** und verstehen unter y und z deren Koordinaten, so kann die Kurven-Richtung sowohl durch $\frac{dz}{dy}$ wie durch $\frac{\tau_z}{\tau_y}$ ausgedrückt werden. Man findet daher für den elliptischen Querschnitt aus (274)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\tau_x}{\tau_y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

sowie durch Integration

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = C,$$

die Gleichung einer Ellipse, welche zur Randellipse ähnlich ist. Für jede dieser elliptischen Schubspannungskurven hat C einen andern Wert, für die Randellipse ist $C = 1$.

Der rechteckige Torsionsquerschnitt.

§ 81. Nach Gleichung (272) erhält man, wenn φ die Bedeutung Fig. 45 hat,

für die Seite BD $\quad \operatorname{tang} \varphi = \infty, \quad \tau_y = 0,$

" " " CD $\quad \operatorname{tang} \varphi = 0, \quad \tau_z = 0,$

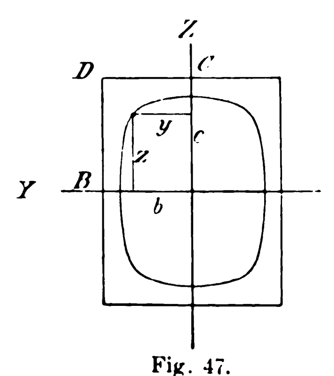


Fig. 47.

also nach (259) für BD und CD

$$0 = (m + m_1 b^2 + m_2 z^2) z,$$
$$0 = (n + n_1 c^2 + n_2 y^2) y.$$

Da z und y im allgemeinen nicht Null sind, so können diese Gleichungen nur durch Verschwinden der Klammerwerte erfüllt werden, was für beliebige Werte von z, bezw. von y nur möglich ist, wenn

$$m_2 = 0 \quad \text{und} \quad n_2 = 0$$

sowie

$$m_1 = -\frac{m}{b^2}, \qquad n_1 = -\frac{n}{c^2} \tag{277}$$

ist. Für einen beliebigen Querschnittspunkt wird also nach (259)

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_y &= m\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)z, \\ \tau_z &= n\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)y. \end{aligned} \right. \tag{278}$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (273) ein, so folgt

$$M_x = -m\int z^2 \mathrm{d}F + n\int y^2 \mathrm{d}F + \left(\frac{m}{b^2} - \frac{n}{c^2}\right)\int y^2 z^2 \mathrm{d}F$$

oder, da

$$\int z^2 \mathrm{d}F = \frac{4}{3} b c^3, \qquad \int y^2 \mathrm{d}F = \frac{4}{3} c b^3, \qquad \int y^2 z^2 \mathrm{d}F = \frac{4}{9} b^3 c^3,$$

$$M_x = -m\frac{4}{3} b c^3 + n\frac{4}{3} b^3 c + \left(\frac{m}{b^2} - \frac{n}{c^2}\right)\frac{4}{9} b^3 c^3,$$

vereinfacht:

$$n b^2 - m c^2 = \frac{9}{8}\frac{M_x}{bc}. \tag{279}$$

Nach Gleichung (268) ist aber ausserdem $m_1 + n_1 = 0$, also nach (277)

$$n b^2 + m c^2 = 0, \tag{280}$$

und es folgt aus (279) und (280)

$$m = -\frac{9}{16}\frac{M_x}{b c^3}, \qquad n = \frac{9}{16}\frac{M_x}{b^3 c}, \tag{281}$$

also nach (278)

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_y &= -\frac{9}{16}\frac{M_x}{b c^3}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)z, \\ \tau_z &= \frac{9}{16}\frac{M_x}{b^3 c}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)y. \end{aligned} \right. \tag{282}$$

Der grösste Wert für τ ergibt sich, wenn $c > b$, für den Punkt B zu

$$\operatorname{Max}\tau = \tau_b = \frac{9}{16}\frac{M_x}{b^2 c}, \tag{283}$$

während für C folgt

$$\tau_c = \frac{9}{16} \frac{M_x}{b c^2} . \tag{284}$$

Für D erhält man, da $y = b$, $z = c$,

$$\tau_y = 0 , \qquad \tau_z = 0 .$$

Auch im Mittelpunkte des Querschnitts wird $\tau = 0$.

Für eine Schubspannungskurve ist nach (282) analog zu § 80:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\tau_z}{\tau_y} = -\frac{(c^2 - z^2) y}{(b^2 - y^2) z} .$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man

$$(c^2 - z^2)(b^2 - y^2) = C . \tag{285}$$

Eine dieser Kurven ist in Fig. 47 dargestellt. Für $C = 0$ erhält man als besonderen Fall den Umfang des Rechtecks mit $y = b$ und $z = c$.

Die Ergebnisse dieses § sind zwar mit der Erfahrung soweit in Einklang, dass sie für technische Zwecke in der Regel brauchbar sind. Wie in § 84 gezeigt wird, ist jedoch die Torsion des rechteckigen Stabes eine mit der wünschenswerten Strenge noch nicht gelöste Aufgabe (vergl. Anm. zu § 78).

Die Formänderung der Radien eines tordierten Stabes.

§ 82. Während für kreisförmige Querschnitte aus Symmetriegründen angenommen werden muss, dass sie bei der Torsion eben bleiben, ist dies bei anderen Querschnitten nicht der Fall. Mit grösserem Recht darf man aber davon ausgehen, dass die Formänderung eines materiellen Querschnittes nur in Verschiebungen seiner Elemente in Richtung der Stabachse besteht, dass also die Projektion des Querschnitts auf seine ursprüngliche Ebene unverändert bleibt, mithin überall $\varepsilon_y = 0$ und $\varepsilon_z = 0$ ist. Diese Annahme wird dadurch gestützt, wenngleich nicht streng bewiesen, dass die Flächenintegrale

$$\int \sigma_x \mathrm{d}F , \qquad \int \sigma_y \mathrm{d}F , \qquad \int \sigma_z \mathrm{d}F$$

Schnittkräfte darstellen, welche Null sein müssen, da Achsialkräfte und Mantelkräfte, die mit ihnen im Gleichgewicht stehen müssten, nicht vorhanden sind, und dass diese Bedingungen mit $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$ erfüllt werden, was nach (110) mit $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_z = 0$ in Einklang steht.

Man erhält von der gegenseitigen Bewegung zweier solchen unendlich he benachbarten Querschnitte eine zutreffende Vorstellung, wenn man sie it Blechplättchen vergleicht, welche sich überall berühren und welche, ohne ie Berührung aufzuheben, etwas gebogen und um einen kleinen Winkel erdreht werden können. Dabei bleibt jeder Punkt ausserhalb der X-Achse uf einem Kreiszylinder, jeder Kreis um X deformiert sich zu einer in sich urückkehrenden Raumkurve, die man etwa als windschiefen Kreis beeichnen könnte, jeder Kreisradius, d. h. jede zu X normale Gerade geht iber in eine einfach gekrümmte Kurve, deren Krümmung in der Meridianebene iegt, während die Projektion auf YZ eine Gerade bleibt, jede zu X parallele Gerade — Mantellinie — wird eine Schraubenlinie von grosser, überall gleich bleibender Steigung — die Mantelschraube.

Bildet in Fig. 48 ein Radius, dessen Abszisse x st, mit der XY-Ebene ursprünglich den Winkel φ, welcher elastisch in $\varphi + \Delta\varphi$ übergeht, so wird der Deformationswinkel für einen Radius, dessen Abszisse $x + dx$ ist, um den Betrag $\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial x} dx$ grösser sein. Mit der Abkürzung

$$\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial x} = D\,,$$

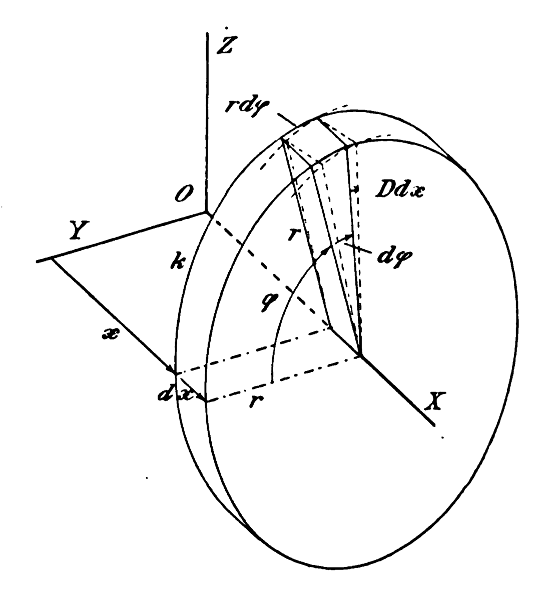


Fig. 48.

welche die relative Drehung zweier Querschnitte von 1 cm Entfernung, die heisse Drall [1]), bedeutet, ist $D dx$ die relative Drehung zweier Nachbarquerschnitte, also $rD dx$ die relative Verschiebung zweier Nachbarkreise vom Abstand dx in Richtung der Kreislinie und $\frac{rD\,dx}{dx} = rD$ der Winkel, welchen die Mantelschraube mit X bildet.

Ist ξ (s. § 11) die Verschiebung nach X, welche ein durch die Ko-

1) Ein zur Beugung B analoger Begriff (s. § 63).

ordinaten x, φ, r gegebener Punkt B_0, Fig. 49, erleidet, so ist nach den Voraussetzungen ξ für den Punkt B_1 eben so gross, d. h. $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$.

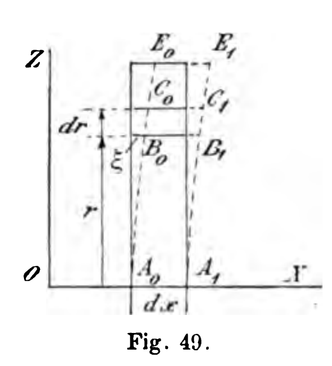


Fig. 49.

Für verschiedene Punkte B_0, C_0 eines Strahles x, φ ist jedoch ξ verschieden, wie der Meridianschnitt Fig. 49 andeutet, und $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ ist der Winkel, welchen das Element $B_0 C_0$ der Deformationskurve $A_0 E_0$ des Strahls mit dessen Anfangsrichtung bildet. Da $B_0 B_1$ zu X parallel bleibt, so ist zugleich

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \mu_{xr}, \tag{286}$$

unter μ_{xr} (s. § 12) die Verminderung des rechten Winkels (xr) verstanden, also wird nach (112)

$$\tau_{xr} = G \frac{\partial \xi}{\partial r}. \tag{287}$$

Ist $\xi = 0$ für $r = 0$, wie in Fig. 49 angenommen, so erhält man nach (287)

$$\xi = \frac{1}{G} \int_0^r \tau_{xr} \mathrm{d} r, \tag{288}$$

d. i. die Gleichung der elastischen Linie $A_0 E_0$.

Deformation von beliebigen Linien eines Querschnitts.

§ 83. Bezeichnet man ferner die Bogenlänge $r\varphi$, Fig. 48, mit k (Kreisabszisse), so ist $\xi = F(k)$ die Gleichung der elastisch deformierten Kreislinie, also $\frac{\partial \xi}{\partial k}$ der Biegungswinkel für ein Kreiselement. Aus diesem und dem Winkel rD der Mantelschraube (§ 82) setzt sich aber die Minderung μ_{xk} des Winkels zwischen Kreiselement und Mantellinie zusammen, sonach ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial k} + rD = \mu_{xk}, \tag{289}$$

sowie

$$\tau_{xk} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial k} + rD\right). \tag{290}$$

Ist ferner ds, Fig. 50, der unendlich kleine Abstand zweier Punkte nes Stabquerschnittes, $d\xi$ die totale Zunahme von ξ längs ds, so kann ξ ausgedrückt werden durch die partiellen Zunahmen nach r und nach als

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial r} dr + \frac{\partial \xi}{\partial k} dk, \tag{291}$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (287) und (290), als

$$d\xi = \frac{\tau_{xr}}{G} dr + \left(\frac{\tau_{xk}}{G} - rD\right) dk. \tag{292}$$

Bezeichnet man mit df die unendlich kleine Dreiecksfläche, welche r beschreibt, während der Endpunkt von r das Element ds durchläuft, so ist offenbar

$$df = \frac{1}{2} r dk,$$

und Gleichung (292) schreibt sich danach auch:

$$d\xi = \frac{1}{G}(\tau_{xr} dr + \tau_{xk} dk) - 2 D df. \tag{293}$$

Wie Fig. 50 zeigt, ist, wenn das Kurvenelement den Radiusvektor unter dem Winkel ψ schneidet,

$$dr = ds \cos\psi, \qquad dk = ds \sin\psi,$$

sonach

$$d\xi = \frac{1}{G}(\tau_{xr} \cos\psi + \tau_{xk} \sin\psi) ds - 2 D df.$$

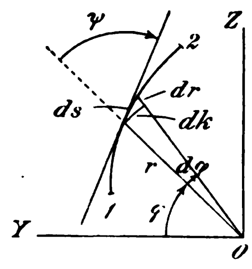


Fig. 50.

Offenbar sind aber $\tau_{xr} \cos\psi$ und $\tau_{xk} \sin\psi$ die Projektionen von τ_{xr} und τ_{xk} auf ds, sonach ist

$$\tau_{xr} \cos\psi + \tau_{xk} \sin\psi = \tau_{xs}$$

die X-schnittige Schubspannungskomponente nach ds, also auch nach (293)

$$d\xi = \frac{1}{G} \tau_{xs} ds - 2 D df. \tag{294}$$

Für die beliebige Kurvenstrecke von 1 bis 2 ist daher

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{1}{G}\int_1^2 \tau_{xs} ds - 2 D f_1^2; \tag{295}$$

unter f_1^2 die Fläche $O\ 1\ 2\ O$ verstanden.

Der Drallwinkel.

§ 84. Für eine geschlossene Kurve muss $\xi_2 = \xi_1$ sein, also nach (295)

$$\int \tau_{xs} \mathrm{d}s = 2GfD. \tag{296}$$

Diese von **Rud. Bredt** angegebene Gleichung [1]) gestattet wertvolle Anwendungen.

Ist z. B. für irgend eine in dem Querschnitt gezogene Kurve, etwa für die Randlinie τ_{xs} überall bekannt, so dass $\int \tau_{xs} \mathrm{d}s$ berechnet werden kann, so erhält man, wenn F der Flächeninhalt der Randlinie ist, den Drall

$$D = \frac{1}{2FG}\int \tau_{xs} \mathrm{d}s\,. \tag{297}$$

Für ein Flächenelement $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ erhält man nach Gleichnng (296) im Hinblick auf Fig. 51

$$\tau_{xy}\mathrm{d}y + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y - \tau_{xz}\mathrm{d}z = 2GD\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

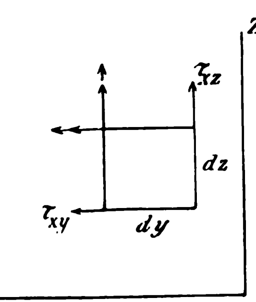


Fig. 51.

oder

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 2GD\,. \tag{298}$$ [2])

Grashof berechnet für den Drall die Gleichung

$$D = \frac{1}{2G}(n - m)\,, \tag{299}$$

unter m und n die Konstanten der Gleichung (259) verstanden, während **Föppl** aus der Gleichung für die elastische Energie (126) findet

$$D = \frac{1}{M_x G}\int(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)\mathrm{d}F\,. \tag{300}$$

Während diese Gleichungen für den elliptischen Querschnitt übereinstimmend ergeben:

$$D = \frac{1}{\pi}\frac{M_x}{G}\frac{b^2 + c^2}{b^3 c^3}\,, \tag{301}$$

erhält man für den rechteckigen Querschnitt:

---

1) s. Zitat S. 100.

2) s. Föppl, Technische Mechanik, 3. Bd. S. 419.

$$
(302) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
\text{nach (297)} & D = 0{,}1875 \dfrac{M_x}{G} \dfrac{b^2+c^2}{b^3c^3}, \\
\text{nach (299)} & D = 0{,}281 \dfrac{M_x}{G} \dfrac{b^2+c^2}{b^3c^3}, \\
\text{nach (300)} & D = 0{,}225 \dfrac{M_x}{G} \dfrac{b^2+c^2}{b^3c^3}, \\
\text{nach (298)} & D = 0{,}281 \dfrac{M_x}{G} \dfrac{b^2+c^2-y^2-z^2}{b^3c^3}.
\end{array} \right.
$$

Die Verschiedenheit dieser Ausdrücke lässt erkennen, dass dieselben ich nicht im Einklang befinden; und aus dem letzten zeigt sich, dass bei em angenommenen Spannungsgesetz der Drehwinkel in den verschiedenen Elementen des Querschnitts sehr verschieden sein müsste, was den Voraus-etzungen in § 82 nicht entspricht.

Solange diese Widersprüche nicht durch die Auffindung eines genaueren Spannungsgesetzes gehoben sind, ist für praktische Aufgaben die Ermitte-ung von D bei rechteckigem Querschnitt durch Torsionsversuche[1]) zu mpfehlen. Führt man eine Querschnittsfunktion T, genannt Torsions-coeffizient, ein, welche für die Torsion eine ähnliche Rolle spielt wie J in (217) für Biegung, indem man setzt:

$$
(303) \qquad D = \frac{M_x}{GT},
$$

o wäre es die Aufgabe solcher Versuche, T zu ermitteln.

Für kreisförmigen Querschnitt ist nach (301) $T = \frac{\pi}{2} r^4$, d. i. das olare Trägheitsmoment J_p des Kreises. Für einen Stab von kreis-rmigem Querschnitt von der Länge s ist daher der Drehwinkel auch

$$
(304) \qquad \vartheta = Ds = \frac{M_x}{GJ_p} s.
$$

Hydraulischer Vergleich.

§ 85. Die in der Kurvenrichtung ds wirkenden τ_{xs} sind im allgemeinen nur omponenten der Tangentialspannungen; ausser diesen können auch noch omponenten τ_{xn}, normal zu ds, vorhanden sein. Denkt man sich aus nem zwischen zwei Normalschnitten liegenden Stabelement von der Dicke

1) s. u. a. Bauschinger, Versuche mit gusseisernen Stäben, Civilin-nieur 1881. S. 115.

dx einen der geschlossenen Kurve s entsprechenden Teil ausgeschnitten, so muss, da $\sigma_x = 0$ ist, die Resultante der nach X gerichteten Tangentialspannung τ_{nx} im Mantel dieses Ausschnittes für sich Null sein, d. h.

$$dx \int \tau_{nx} ds = 0 .$$

Da $\tau_{nx} = \tau_{xn}$, so führt dies auf die Bedingung

$$\int \tau_{xn} ds = 0 , \tag{305}$$

eine Erweiterung der Elementargleichung (266) auf eine endliche Fläche. Gilt (266) für sämtliche Elemente einer endlichen Fläche, was bei Ableitung von (271) angenommen wurde, so ist mit dem Gleichgewicht dieser Elemente zugleich auch das Gleichgewicht ihrer Summe im Sinne von X gesichert, also Gleichung (305), welche dies ausdrückt, erfüllt.

Für den elliptischen und den rechteckigen Querschnitt wird daher bei dem auf (271) beruhenden Spannungsgesetz Gleichung (305) für jede geschlossene Figur erfüllt sein.

Für die Randlinien sowie für die Schubspannungskurven ist überall $\tau_n = 0$. Danach erkennt man leicht, dass z. B. für je zwei von einem beliebigen Punkte A nach dem Rand gezogen gedachte gerade oder krumme Linien, etwa AE und AF

$$\int_A^E \tau_{xn} ds + \int_F^A \tau_{xn} ds = 0$$

oder

$$\int_A^E \tau_{xn} ds = \int_A^F \tau_{xn} ds$$

ist. Entsprechend ergibt sich, wenn in Fig. 52 AB und $A'B'$ zwei benachbarte Schubspannungskurven sind, der Wert τ_n aber für AA' mit τ_a, für BB' mit τ_b bezeichnet wird, nach Gleichung (305)

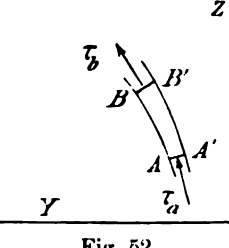


Fig. 52.

$$\tau_a AA' = \tau_b BB' , \tag{306}$$

eine Beziehung, die den Vergleich zwischen τ_n und der Geschwindigkeit einer in dem Kanal $AA'BB'$ strömenden inkompressiblen Flüssigkeit nahe legt, auf welchen nach **Föppl** zuerst Thomson und Tait in ihrer Natural Philosophie aufmerksam gemacht haben.

Belastung eines einfach gekrümmten Stabes durch eine zur Krümmungsebene normale Kraft.

§ 86. Ist in Fig. 53 Q der Angriffspunkt einer Normalkraft K, so erfährt das elastische Element $\mathrm{d}s$ ein biegendes Moment $M_b = Kk_b$ und ein drehendes Moment $M_d = Kk_d$,

(307) sonach die Beugung $B = \frac{Kk_b}{EJ}$

(308) und den Drall $D = \frac{Kk_d}{GT}$.

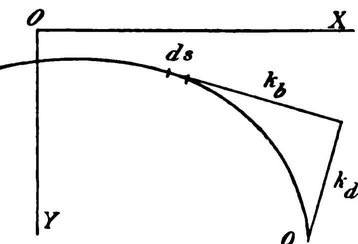


Fig. 53.

Die elastische Wirkung nach Z auf den Punkt Q durch das Element $\mathrm{d}s$ ist sonach (s. § 63 und § 64)

$$\mathrm{d}(\Delta z) = (k_b B + k_d D)\,\mathrm{d}s\,,$$

die elastische Wirkung des ganzen Stabes also

$$\Delta z = \int k_b B\,\mathrm{d}s + \int k_d D\,\mathrm{d}s \tag{309}$$

oder, nach (307) und (308),

$$\Delta z = \frac{K}{EJ}\int k_b^2\mathrm{d}s + \frac{K}{GT}\int k_d^2\mathrm{d}s\,. \tag{310}$$

Um die **Drehung** des Endquerschnittes auszudrücken, zerlegen wir die der Beugung und dem Drall entsprechenden elementaren Drehwinkel $B\,\mathrm{d}s$ und $D\,\mathrm{d}s$ in je zwei Komponenten nach X und Y. Ist β_x die Drehung des Endquerschnitts um X, β_y die um Y, so ist, wenn $\mathrm{d}s$ mit X den Winkel α bildet,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{d}\beta_x &= B\,\mathrm{d}s\sin\alpha + D\,\mathrm{d}s\cos\alpha\,,\\ \mathrm{d}\beta_y &= B\,\mathrm{d}s\cos\alpha + D\,\mathrm{d}s\sin\alpha\,,\end{aligned}\right. \tag{311}$$

$$\left\{\begin{aligned} \beta_x &= \frac{K}{EJ}\int k_b\sin\alpha\,\mathrm{d}s + \frac{K}{GT}\int k_d\cos\alpha\,\mathrm{d}s\,,\\ \beta_y &= \frac{K}{EJ}\int k_b\cos\alpha\,\mathrm{d}s + \frac{K}{GT}\int k_d\sin\alpha\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}\right. \tag{312}$$

Ist die Ausrechnung der Integrale unmöglich oder zu umständlich, so empfiehlt es sich, sie durch endliche Summen zu ersetzen (vergl. § 66).

Sind ausser der mit Z parallelen Kraft K noch Komponenten vorhanden, welche die Richtung Y oder X haben, so ergeben sich noch die

Deformationsgrössen Δx, Δy, β; wie bei dem in seiner Ebene gebogenen Stab, im ganzen also 6 Deformationsgrössen, welche bei statisch unbestimmten Aufgaben zur Ermittelung von 6 mechanischen Grössen dienen können.

Die Anstrengung des Materials ist in den Umfangspunkten am grössten. Ist für einen solchen η der Abstand von der neutralen Linie, so berechnet sich die Biegungsspannung nach (161), die Schubspannung aus ihren Komponenten nach (271), damit aber erhält man die beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 nach (43). Führt man diese Ausdrücke in die Poissonschen Gleichungen (104) ein, so erhält man die wichtigen Gleichungen

$$(313)\quad \left|\begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \frac{m-1}{2m}\sigma_x + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}\,, \\ E\varepsilon_2 &= \frac{m-1}{2m}\sigma_x - \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}\,, \\ E\varepsilon_3 &= -\frac{1}{m}\sigma_x\,, \end{aligned}\right.$$

welche natürlich auch für gerade Stäbe gelten, z. B. für Wellen, die gleichzeitig auf Biegung und auf Torsion beansprucht sind.

Während für den einachsigen Spannungszustand $E\varepsilon_1 = \sigma_1$ ist, sind die Ausdrücke $E\varepsilon_1$, $E\varepsilon_2$, $E\varepsilon_3$ zwar der Dimension nach Spannungen; doch sind dieselben keineswegs identisch mit σ_1, σ_2, σ_3. Es sind vielmehr Dehnungen in Spannungseinheiten ausgedrückt. Die übliche Benennung dieser für die Beurteilung der Festigkeitsgefahr wichtigen Grössen (vergl. § 124) als reduzierte Spannungen oder Ersatzspannungen ist daher nicht ganz treffend. Geeigneter ist vielleicht Zerrung für positive, Quetschung für negative Werte von $E\varepsilon$.

Mit Benutzung dieser Ausdrücke wird für $m = \frac{10}{3}$ nach (313)

$$(314)\quad \left|\begin{aligned} &\text{die grösste Zerrung} & E\varepsilon_1 &= \frac{7}{20}\sigma_x + \frac{13}{20}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}\,, \\ &\text{,, ,, Quetschung} & -E\varepsilon_2 &= -\frac{7}{20}\sigma_x + \frac{13}{20}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}\,. \end{aligned}\right.$$

Insbesondere für reine Torsion, also $\sigma_x = 0$, wird

$$(315)\qquad E\varepsilon_1 = \frac{13}{10}\tau\,, \qquad -E\varepsilon_2 = \frac{13}{10}\tau\,.$$

Belastung eines doppelt gekrümmten Stabes durch eine beliebige Kraft.

§ 57.

Ein elastisches Element ds der Zentrallinie (s. Fig. 54) habe die Koordinaten x, y, z und bilde mit den Achsen die Winkel α, β, γ. Ferner seien a, b, c die Koordinaten des Angriffspunktes einer Kraft K, welche durch die Achskomponenten K_x, K_y, K_z ersetzt werden kann.

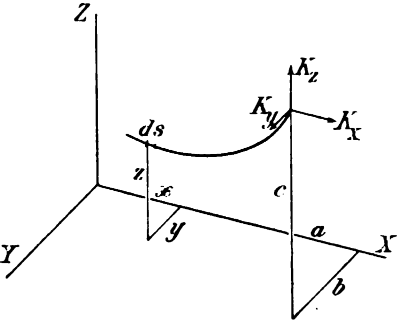


Fig. 54.

Verlegt man den Angriffspunkt dieser Kräfte unter Hinzufügung eines Momentes in das elastische Element, so ergeben sich daselbst die Momente, bezogen auf die Achsen X, Y, Z,

$$
(316)\quad \begin{cases} M_x = K_z(b-y) - K_y(c-z)\,, \\ M_y = K_x(c-z) - K_z(a-x)\,, \\ M_z = K_y(a-x) - K_x(b-y)\,. \end{cases}
$$

Aus diesen Momenten setzt sich ein resultierendes Moment zusammen, dessen Grösse

$$
(317)\qquad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}
$$

ist und dessen Richtung durch die Stellwinkel λ, μ, ν bestimmt werden kann, für welche die Gleichungen

$$
(318)\qquad \cos\lambda = \frac{M_x}{M}\,, \qquad \cos\mu = \frac{M_y}{M}\,, \qquad \cos\nu = \frac{M_z}{M}
$$

gelten.

Ist ferner φ der Winkel zwischen ds und der resultierenden Momentenachse, so folgt derselbe aus der Gleichung

$$
\cos\varphi = \cos\lambda\,\cos\alpha + \cos\mu\,\cos\beta + \cos\nu\,\cos\gamma\,.
$$

und man erhält in ds

als biegendes Moment $M_b = M\sin\varphi$,
als drehendes Moment $M_d = M\cos\varphi$.

Dabei enthält die Ebene von φ die Achse des biegenden Moments, welche nach § 55 gefunden werden kann.

Um nun die Wirkung der Biegung $\frac{M_b}{EH}ds$ oder $B ds$ und der Drehung $\frac{M_d}{GT}ds$ oder $D ds$ auf einen in der Laufrichtung unterhalb ds liegenden Punkt, z. B. den Punkt a, b, c zu ermitteln, müssen diese unendlich kleinen Winkel wieder nach X, Y, Z zerlegt werden. Sind dann $d\beta_x$, $d\beta_y$, $d\beta_z$ die Winkelkomponenten, so wird

$$(319)\quad \begin{cases} d(\Delta a) = (c - z)\, d\beta_y - (b - y)\, d\beta_z\,, \\ d(\Delta b) = (a - x)\, d\beta_z - (c - z)\, d\beta_x\,, \\ d(\Delta c) = (b - y)\, d\beta_x - (a - x)\, d\beta_y\,. \end{cases}$$

Man erkennt, dass das Verfahren äusserst umständlich ist und im allgemeinen einen viel grösseren Zeitaufwand beansprucht, als für technische Aufgaben zulässig ist.

Von gewissen einfacheren Sonderfällen abgesehen, wird man daher lieber statt der Rechnung den Modellversuch (s. § 120) zu Hilfe nehmen oder doppelt gekrümmte Kurven in der Stabmittellinie vermeiden, wenn eine genaue Vorausberechnung der Deformation notwendig ist.

Die Schraubenfeder.

§ 88. Einen wichtigen hierher gehörigen einfachen Sonderfall stellt die zylindrische Schraubenfeder bei achsialer Belastung dar.

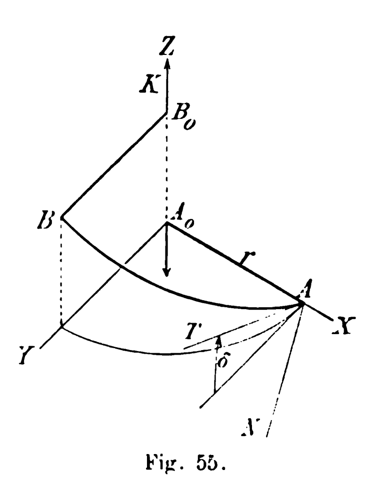


Fig. 55.

Ist in Fig. 55 AB der vierte Teil einer Windung, ds ein elastisches Element in A, r der mittlere Windungshalbmesser, δ der überall gleiche Steigungswinkel, so sind für das Element ds die Koordinaten:

$$x = r\,, \qquad y = 0\,, \qquad z = 0\,,$$

die Stellwinkel:

$$\alpha = 90^0\,, \qquad \beta = \delta\,, \qquad \gamma = 90 - \delta\,.$$

Die starr gedachten Arme AA_0, BB_0 dienen dazu, die achsiale Belastung $K_z = K$ auf den Quadranten wirken zu lassen, während $K_x = 0$, $K_y = 0$ ist. AA_0 sei dem Koordinatensystem gegenüber unbeweglich, während der Angriffspunkt B_0 die Koordinaten (im Sinne von Fig. 54 bezeichnet)

$$a = 0\,, \quad b = 0\,, \quad c = A_0 B_0$$

hat. Nach den Gleichungen (316) erhält man für das elastische Element in A $M_x = 0$, $M_y = Kr$, $M_z = 0$, also $M = Kr$, $\lambda = 90^0$, $\mu = 0$, $\nu = 90^0$.

Zerlegt man das Moment M, welches um eine zu Y parallele Achse dreht, nach den Achsen AT und AN, so entstehen die Komponenten

$$M_b = Kr \sin\delta\,, \qquad M_d = Kr \cos\delta$$

welche

die Beugung $\frac{Kr}{EJ}\sin\delta\, ds$ um die Achse AN,

den Drall $\frac{Kr}{GJ_p}\cos\delta\, ds$ " " " AT.

hervorbringen, aus denen folgt

$$d\beta_x = 0\,,$$
$$d\beta_y = Kr\left(\frac{\sin^2\delta}{EJ} + \frac{\cos^2\delta}{GJ_p}\right)ds\,,$$
$$d\beta_z = Kr\left(-\frac{\sin\delta\cos\delta}{EJ} + \frac{\sin\delta\cos\delta}{GJ_p}\right)ds\,.$$

Die Gleichungen (319) ergeben endlich

$$d(\Delta a) = A_0 B_0 d\beta_y\,,$$
$$d(\Delta b) = -r\, d\beta_z\,,$$
$$d(\Delta c) = r\, d\beta_y\,.$$

Die Dehnung der Feder in Richtung der Achse für eine volle Windung ist hiernach, wenn s die Drahtlänge ist, allgemein

$$\Delta c = Kr^2\left(\frac{\sin^2\delta}{EJ} + \frac{\cos^2\delta}{GJ_p}\right)s\,. \tag{320}$$

Setzt man für eng gewickelte Federn $\sin\delta = 0$, $\cos\delta = 1$, so erhält man die gebräuchliche Näherungsformel

$$\Delta c = \frac{Kr^2}{GJ_p}s\,, \tag{321}$$

welche jedoch nur unter der Voraussetzung gilt, dass sich benachbarte Windungen nicht berühren.

Um die Verschiebungen Δa und Δb für eine ganze oder eine Teilwindung zu integrieren, hat man zu beachten, dass die auf das Element bei A folgenden Elemente nicht mehr zur YZ-Ebene parallel sind. Ist

φ der Winkel, welchen ihr Radius mit X bildet, so erhält man, wenn man für die bisherigen Werte $d(\Delta a)$ und $d(\Delta b)$ vorübergehend $d(\Delta a)_0$ und $d(\Delta b)_0$ setzt,

$$(322) \qquad \begin{cases} d(\Delta a) = d(\Delta a)_0 \cos\varphi - d(\Delta b)_0 \sin\varphi \\ d(\Delta b) = d(\Delta a)_0 \sin\varphi + d(\Delta b)_0 \cos\varphi . \end{cases}$$

Integriert man diese Gleichungen für eine volle Windung, so erhält man $\Delta a = 0$ und $\Delta b = 0$. Für Teilwindungen ist dies nicht der Fall.

Für β_z ergibt sich für beliebige Federlänge s, also auch für eine volle Windung, ein für steilgängige Federn beträchtlicher Wert:

$$(323) \qquad \beta_z = K r s \left(-\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p}\right) \sin\delta \cos\delta .$$

Eine Schraubenfeder wird sich also bei achsialer Belastung nicht nur dehnen, sondern ihre Elemente werden sich auch um die Längsachse drehen.

VII. Abschnitt.

Die Festigkeit wandfömiger Körper.

Übersicht der Aufgaben.

§ 89. Bei einer Gefässwand ist jede der beiden Oberflächen eine Hauptspannungs- oder Netzfläche (s. § 32). Von diesen werden sich die inneren gleichnamigen Netzflächen um so weniger unterscheiden, je dünner die Wand ist. Bezeichnen wir die in diesen Flächen liegenden Netzlinien mit I und II (s. § 33), so sind die Linien III zur Oberfläche normal.

Die Spannung σ_3 ist in den Oberflächen gewöhnlich negativ, entsprechend einem Flüssigkeitsdruck, der bei den hier in Frage kommenden Fällen des Bau- oder Maschinenwesens selten die Grenze von 30 Atm. oder 30 kg/qcm überschreitet, während die Spannungen σ_1 und σ_2 in der Regel höher als 300 kg/qcm gewählt werden dürfen. Da ferner σ_3 im Inneren der Wand gewöhnlich einen Wert hat, der zwischen denen in den Oberflächen liegt, so erscheint es zulässig, bei wandförmigen Körpern im Sinne von § 2, d. h. bei dünnwandigen Körpern, σ_3 gegenüber σ_1 und σ_2 zu vernachlässigen, also mit

$$\sigma_3 = 0 \tag{324}$$

den Spannungszustand als einen zweiachsigen zu behandeln. Unter dieser Annahme erhält man aus den Gleichungen (104) als Ersatz für die Gleichungen (110) für je zwei in der Fläche II III liegende rechtschnittige Spannungen σ_x und σ_y, gleichviel, ob dies Hauptspannungen sind oder nicht, die Ausdrücke

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m}{m^2-1} E(m\varepsilon_x + \varepsilon_y)\,, \\ \sigma_y &= \frac{m}{m^2-1} E(m\varepsilon_y + \varepsilon_x)\,, \end{aligned}\right. \tag{325}$$

aus denen für den Sonderfall $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, d. h. für geometrisch ähnliche Deformation der Netzflächen I II (s. § 5) für jede in einer solchen Fläche liegende Spannung folgt

$$(326) \qquad \sigma_x = \sigma_y = \frac{m}{m-1} E \varepsilon_x = \frac{m}{m-1} E \varepsilon_y .$$

Die Gleichungen (325) kommen insbesondere bei der Berechnung von Rotationskörpern in Anwendung.

Die Spannungen σ_x und σ_y können längs einer Netzlinie III, die normal zu den Wandflächen ausläuft, konstant bleiben oder sich ändern. Im ersten Falle hat die Beanspruchung Ähnlichkeit mit der reinen Zug- oder Druckbeanspruchung, im zweiten mit der Biegungsbeanspruchung. Wenn es möglich ist, eine Gefässwand so zu gestalten, dass keine Biegungsbeanspruchung stattfindet, so ist es jedenfalls technisch vorteilhaft, da hiermit die Materialausnützung eine möglichst vollkommene wird.

Als wandförmige Körper können in der Regel Wasserbehälter, Dampfkessel, Gasbehälter, Röhren aller Art, Gerinne, Ankerplatten, Scheibenkolben, Deckplatten und ähnliche Gegenstände berechnet werden. Einige Beispiele enthalten die folgenden Paragraphen, zum Teil im Anschluss an Grashofs Theorie der Elastizität und Festigkeit, woselbst diese Aufgaben mit grosser Ausführlichkeit und mathematischer Vollendung behandelt werden.

Die kreisförmige ebene Scheibe bei polarsymmetrischer Belastung.

§ 90. Die Scheibe habe den äusseren Radius l und die Dicke $d = 2a$, und es werde, wie in dem ganzen Abschnitte, $\frac{d}{l}$ als ein kleiner echter Bruch angesehen.

Sie werde belastet durch 2 Kräfte $2\pi K_1$ und $2\pi K_2$, welche über die Kreislinien mit den Halbmessern k_1 und k_2 gleichmässig verteilt sind und Zylinderkräfte heissen mögen, ausserdem durch den Flächendruck p von oben über die ganze Scheibenfläche πl^2. Damit die Scheibe im Gleichgewicht ist, muss sein

$$(327) \qquad 2 K_1 - 2 K_2 + p l^2 = 0 .$$

Die vor der Belastung ebene Mittelfläche geht unter dieser polarsymmetrischen Belastung in eine Rotationsfläche über, deren Meridianschnitt

ı Fig. 56 durch Kurve OE dargestellt ist. OE kann mit der elastischen Biegungslinie des geraden Stabes verglichen werden, und, um diesen Vergleich zu erleichtern, bezeichnen wir, wie bei jener, die Abszissen mit x, die Ordinaten mit y, die Tangentenwinkel (Biegungswinkel) mit β. Wir

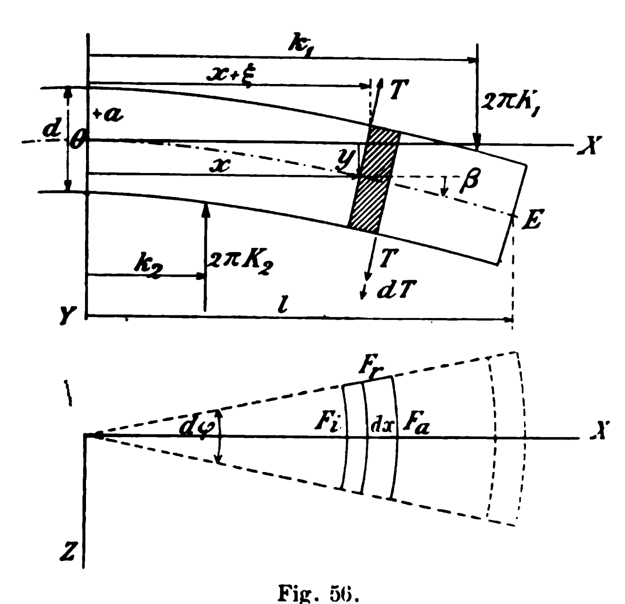


Fig. 56.

setzen dabei voraus, dass y von niederer Grössenordnung ist wie a, und dass β so klein ist, dass $tg\beta = \beta$ gesetzt werden kann. y hat hier dieselbe Bedeutung wie η in § 11.

Wir betrachten die Deformation und das Gleichgewicht eines keilförmigen Elements von der Höhe $2a$, der radialen Länge dx und dem Keilwinkel $d\varphi$ gegen Drehung um eine zur Z-Richtung parallele Achse. Dabei mögen sich die Grössen ε_r, ε_t, σ_r, σ_t auf die Punkte der oberen Scheibenfläche beziehen, in denen offenbar die grösste Spannung und Dehnung herrscht. Ist ferner $x + \xi$ die Länge, in welche der in dieser Fläche liegende Radius eines Kreises von der ursprünglichen Länge x übergeht, und nimmt man an, dass eine anfangs senkrechte Gerade eine zur Kurve OE normale Gerade bleibt, so ist $\frac{\xi}{x} = \frac{\beta a}{x}$ die grösste relative Dehnung des Halbmessers, und diese ist zugleich die Dehnung des keilförmigen Elements in Richtung des mit Z parallelen Kreisbogens, d. h. ε_t. Wir finden daher

$$\varepsilon_z = \beta \frac{a}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{a}{x} = y' \frac{a}{x} \,. \tag{328}$$

Die Radialdehnung ε_x des Elements ist mit der Dehnung des Halbmessers nicht zu verwechseln. In jedem Element $\mathrm{d}x$ des Halbmessers x ist ε_x verschieden, demnach ist

$$\xi = \beta a = \int \varepsilon_x \mathrm{d}x \,,$$

also

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} a = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} a = y'' a \,. \tag{329}$$

In Anbetracht, dass für die Oberfläche $\sigma_y = 0$ ist, wird nach (325), unter Vertauschung von y, ε_y, σ_y mit z, ε_z, σ_z,

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m}{m^2 - 1} E\left(m y'' + \frac{y'}{x}\right) a \,, \\ \sigma_z &= \frac{m}{m^2 - 1} E\left(y'' + m \frac{y'}{x}\right) a \,. \end{aligned} \right. \tag{330}$$

Gleichgewicht des elastischen Elements.

§ 91. Die Annahme $\sigma_y = 0$ ist für die Oberfläche wenigstens insoweit richtig, als in der Regel p von niederer Grössenordnung ist als σ_x und σ_z. Macht man jedoch dieselbe Annahme auch für die inneren Materialpunkte, so liegt hierin eine grössere Ungenauigkeit, die nur bei dünnen Platten noch zulässig ist, hier aber im Interesse der Vereinfachung der Rechnung kaum entbehrt werden kann. Hiermit ergibt sich offenbar für σ_x ein lineares Spannungsgesetz wie bei dem geraden Stab für die Hooke-Bernoullische Hypothese und infolgedessen die Möglichkeit, die Spannkräfte und die Spannungsmomente in den Flächen des Scheibenelements Fig. 56 in ähnlicher Weise wie für den Stabquerschnitt nach (148) und (163) mit Hilfe der grössten Spannung auszudrücken. Sind F_i, F_a, F_r die Inhalte der inneren und äusseren Zylinderfläche bezw. einer der beiden Radialflächen des elastischen Elements und W_i, W_a, W die entsprechenden Widerstandsmomente, so ist

$$F_i = 2a x \mathrm{d}\varphi \,, \quad F_a = 2a(x + \mathrm{d}x)\mathrm{d}\varphi = F_i + 2a \mathrm{d}x \mathrm{d}\varphi \,, \quad F_r = 2a \mathrm{d}x \,,$$

$$W_i = \frac{a}{3} F_i \,, \quad W_a = \frac{a}{3} F_i + \frac{2a^2}{3} \mathrm{d}x \mathrm{d}\varphi \,, \quad W_r = \frac{a}{3} F_r \,.$$

Die in den drei Flächen herrschenden Spannungsmomente sind sonach

$$M_i = -\frac{a}{3} F_i \sigma_x \,,$$

$$M_a = \left(\frac{a}{3} F_i + \frac{2a^2}{3} \mathrm{d}x \mathrm{d}\varphi\right)\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \mathrm{d}x\right),$$

$$M_r = \frac{a}{3} F_r \sigma_z \,.$$

erlegt man M_r, dessen Achse mit X den Winkel $\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}$ bildet, nach X und ', so erhält man als die um Z drehende Komponente der in beiden Raialflächen wirkenden Momente M_r

$$M_{rz} = -\frac{a}{3} F_r \sigma_z \mathrm{d}\varphi = -\frac{2a^2}{3} \sigma_z \mathrm{d}x \mathrm{d}\varphi \,,$$

elche von gleicher Grössenordnung ist wie

$$M_a + M_i = \frac{a}{3} F_i \frac{\partial (x\sigma_x)}{\partial x} \mathrm{d}x = \frac{2a^2}{3} \frac{\partial (x\sigma_x)}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}\varphi \,.$$

Bezeichnet endlich τ die mittlere auf F_i nach oben wirkende Tangenalspannung, so gibt τF_i im Verein mit $\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} \mathrm{d}x\right) F_a$ das Tangentialraftmoment

$$M_t = \tau F_i \mathrm{d}x = 2 a x \tau \mathrm{d}x \mathrm{d}\varphi \,.$$

Setzt man als Bedingung für Gleichgewicht um Z

$$M_{rz} + M_a + M_i + M_t = 0 \,,$$

folgt

31) $$\frac{\mathrm{d}(x\sigma_x)}{\mathrm{d}x} - \sigma_z + 3\frac{x}{a}\tau = 0 \,.$$

Gleichgewicht nach Richtung der Achse.

Die in Gleichung (331) vorkommende mittlere Schubspannung τ liefert § ! die Zylinderfläche vom Radius x die achsiale Schnittkraft

32) $$T = 2a \, 2\pi x \tau \,,$$

mittels deren sich die ausserhalb und innerhalb des Zylinders x wirkenn Vertikalkräfte nach Y das Gleichgewicht halten.

Betrachten wir zunächst die Zone $x > k_1$, so ist

33) $$T = \pi (l^2 - x^2) p = 4 a \pi x \tau \,, \quad \text{also} \quad x\tau = \frac{l^2 - x^2}{4a} p$$

und danach die von τ befreite Gleichung (331):

$$\frac{d(x\sigma_x)}{dx} - \sigma_x = -\frac{3}{4}\frac{l^2-x^2}{a^2}p\,. \tag{334}$$

Für die Zone ($k_1 < x < k_2$) ist hingegen

$$T = \pi(l^2-x^2)p + 2\pi K_1\,, \tag{335}$$

also entsprechend:

$$\frac{d(x\sigma_x)}{dx} - \sigma_x = -\frac{3}{4a^2}\left[(l^2-x^2)p + 2K_1\right], \tag{336}$$

während für die innerste Zone ($x < k_1$) sich ergibt:

$$\frac{d(x\sigma_x)}{dx} - \sigma_x = -\frac{3}{4a^2}\left[(l^2-x^2)p + 2K_1 - 2K_2\right]. \tag{337}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (330) kann man zunächst chung (334) auf die Form bringen:

$$y''' + \frac{y''}{x} - \frac{y'}{x^2} = -\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\frac{p}{E}\frac{1}{a^3}\left(\frac{l^2}{x}-x\right), \tag{338}$$

welche sich durch die Abkürzungen

$$-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\frac{p}{E}\frac{l^2}{a^3} = A\,, \quad \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\frac{p}{Ea^3} = B \tag{339}$$

noch weiter vereinfacht zu

$$y''' + \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x}\right) = \frac{A}{x} + Bx\,. \tag{340}$$

Die erste Integration liefert

$$y'' + \frac{y'}{x} = A\,ln\,x + B\frac{x^2}{2} + C_1 \tag{341}$$

oder

$$\frac{d(xy')}{dx} = Ax\,ln\,x + B\frac{x^3}{2} + C_1 x\,. \tag{342}$$

Die zweite Integration liefert, sofern

$$\int x\,ln\,x = \frac{1}{2}\int ln\,x\,d(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2 ln\,x - \int x\,dx\right) = \frac{x^2}{2}\left(ln\,x - \frac{1}{2}\right.$$

ist, nach Division mit x

$$y' = \frac{A}{2}x\left(ln\,x - \frac{1}{2}\right) + B\frac{x^3}{8} + C_1\frac{x}{2} + \frac{C_2}{x}\,, \tag{343}$$

ie dritte Integration endlich:

$$y = \frac{A}{2}\left[\frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^2}{4}\right] + B\frac{x^4}{32} + C_1\frac{x^2}{4} + C_2 lnx + C_3 .$$

ler vereinfacht:

$$y = A\frac{x^2}{4}\left(lnx - 1\right) + B\frac{x^4}{32} + C_1\frac{x^2}{4} + C_2 lnx + C_3 . \tag{344}$$

Diese Gleichung, in welcher die Konstanten C_1, C_2, C_3 noch nicht ekannt sind, gilt zwar nur für $x > k_1$; man bemerkt jedoch leicht, dass ich für die beiden inneren Zonen nur die Bedeutung von A ändert. Es 'ird nämlich

$$-\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\frac{pl^2 + 2K_1}{Ea^3} = A \text{ für die mittlere Zone ,} \tag{345}$$

$$-\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\frac{pl^2 + 2K_1 - 2K_2}{Ea^3} = A \text{ für die innere Zone .} \tag{346}$$

Beispiel.

Besonders einfach wird die Aufgabe für den Fall (Fig. 57) § 93.

$$k_2 = l , \qquad K_1 = 0 ,$$

. h. für die am Rande frei aufliegende, gleichmässig belastete Platte. Hier t nach (327) $2K_2 = pl^2$, also nach (346) $A = 0$, und nach (344) wird

$$y = + B\frac{x^4}{32} + C_1\frac{x^2}{4} + C_2 lnx + C_3 \tag{347}$$

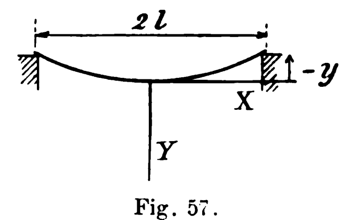


Fig. 57.

e für die ganze Platte von $x = 0$ bis $= l$ giltige Gleichung der Meridianlinie. iese muss im Mittelpunkt eine horizonle Tangente haben, für $x = 0$ muss also $= 0$ sein. Daraus folgt $C_2 = 0$. Ferner rd für den Mittelpunkt $y = 0$, somit ch $C_3 = 0$.

Zur Bestimmung von C_1 dient hier der Umstand, dass für den Umng der Platte, also für $x = l$, überall $\sigma_x = 0$ ist. Mit $C_2 = 0$ folgt s (343) zunächst

$$\frac{y'}{x} = \frac{1}{8} B x^2 + \frac{1}{2} C_1 , \qquad y'' = \frac{3}{8} B x^2 + \frac{1}{2} C_1 .$$

also nach (330) für $x = l$ und $\sigma_x = 0$

$$m\left(\frac{3}{8} B l^2 + \frac{1}{2} C_1\right) + \frac{1}{8} B l^2 + \frac{1}{2} C_1 = 0 ,$$

$$C_1 = -\frac{1}{4} \frac{3m+1}{m+1} B l^2 . \tag{348}$$

Hiermit ist die elastische Linie OE vollständig bestimmt durch die Gleichung:

$$y = \left(\frac{x^4}{32} - \frac{1}{4} \frac{3m+1}{m+1} l^2 \frac{x^2}{4}\right) \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{p}{E a^3} , \tag{349}$$

welche sich auf ein bewegliches, im Mittelpunkt befestigtes Koordinatensystem bezieht und für $x = l$ den Wert ergibt:

$$\operatorname{Max}(-y) = \frac{3}{128} \frac{(5m+1)(m-1)}{m^2} \frac{p l^4}{E a^3} , \tag{350}$$

welcher zugleich die Durchbiegung oder den Biegungspfeil einer am Rande aufliegenden Platte unter dem Drucke p ausdrückt. Bezeichnet man noch die Dicke $2a$ mit d, so erhält man die gebräuchlichere Formel für den Wert des Biegungspfeils:

$$\operatorname{Max} y = \frac{3}{16} \frac{(5m+1)(m-1)}{m^2} \frac{p}{E} \frac{l^4}{d^3} , \tag{351}$$

z. B. für $m = 3$ oder $m = 4$

$$\operatorname{Max} y = 0{,}67 \frac{p}{E} \frac{l^4}{d^3} \quad \text{oder} \quad 0{,}74 \frac{p}{E} \frac{l^4}{d^3} . \tag{352}$$

Um nach (328) und (329) ε_t und ε_x zu finden, berechnen wir nach (349) y' und y'' und erhalten für die untere Fläche der Scheibe, woselbst a durch $-a$ zu ersetzen ist:

$$\varepsilon_t = \frac{Ba}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1} l^2 - 3x^2\right) , \tag{353}$$

$$\varepsilon_x = \frac{Ba}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1} l^2 - x^2\right) . \tag{354}$$

Hiernach ergeben sich für $x = 0$ die grössten, unter einander gleichen, Werte

$$\varepsilon_t = \varepsilon_x = \frac{1}{8} \frac{3m+1}{m+1} B a l^2 = \frac{3}{32} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \frac{p}{E} \frac{l^2}{a^2} . \tag{355}$$

ch dem Rande zu nehmen dieselben ab, und für $x = l$ wird in der
teren Fläche

$$56) \qquad \varepsilon_x = -\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{m+1} B a l^2, \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{8} \frac{2m}{m+1} B a l^2.$$

Die für die Bruchgefahr massgebende Zerrung wird nach (355) für

$$m = 3 \qquad \text{und für} \quad m = 4$$

$$57) \qquad \operatorname{Max}(E\varepsilon_r) = 0{,}83\, p \left(\frac{l}{d}\right)^2 \qquad \text{oder} \qquad 0{,}91\, p \left(\frac{l}{d}\right)^2.$$

Da $m = 4$ den grössten Wert für $\operatorname{Max}(E\varepsilon_r)$ ergibt, so wird dieser
r die Berechnung von d zu benützen sein[1]. Soll z. B. $\operatorname{Max}(E\varepsilon_r) = \mathfrak{S}$
erden, so folgt

$$58) \qquad \frac{d}{l} = 0{,}95 \sqrt{\frac{p}{\mathfrak{S}}}.$$

Verfahren in anderen ähnlichen Fällen.

In anderen Belastungsfällen nimmt die Rechnung einen ähnlichen
erlauf.

Für eine nur im Mittelpunkte unterstützte gleichmässig belastete § 94.
cheibe (Kolben) hätte man z. B. $k_2 = 0$, $K_1 = 0$ zu setzen.

Wäre die Scheibe am Rand befestigt (eingespannt zu denken), so wäre
ie Konstante C_1 aus der Bedingung $y' = 0$ für $x = l$ zu berechnen,
elche an Stelle der hier nicht mehr zutreffenden Bedingung $\sigma_x = 0$ tritt.

Ist die Platte am Rande nicht unbeweglich befestigt, sondern in Ver-
indung mit einem ebenfalls elastischen Körper, so bildet der Wert y' für
en Rand, indem man ihn durch die elastischen Eigenschaften beider Körper
usdrückt, das Mittel, um y' zu eliminieren. In dieser Weise ist z. B. zu
erfahren, wenn die Scheibe den Boden eines zylindrischen Gefässes bildet.

Ist die Scheibe nicht voll, sondern in der Mitte auf einen Halbmesser
$_0$ ausgebohrt, so ist nicht mehr $y' = 0$ für $x = 0$: hingegen ist, wenn
er innere Rand frei ist, für $x = x_0$, $\sigma_x = 0$, welche Bedingung zur Be-
immung von C_2 dienen kann.

---

1) Die grösste vorkommende Schubspannung findet im Zylinder vom Radius
$= l$ und der Höhe d statt. Ihr Mittelwert ist $\tau = 0{,}5\, p \frac{l}{d}$, für $m = 4$ wird
so nach (358) $\tau = 0{,}55 \frac{d}{l} \mathfrak{S}$, und, da $\frac{d}{l}$ ein kleiner Bruch ist, so kommt τ für
ie Bruchgefahr nicht in Frage.

Die kreisförmige Scheibe von ebener Mittelfläche und ungleicher Dicke.

§ 95. Da sich bei konstanter Dicke im allgemeinen eine ungleiche Anstrengung des Materials ergibt, so liegt es nahe, die Dicke ungleich zu machen.

Für diesen Fall hat Stodola [1]) die kolbenartige Scheibe unter Belastung durch ihr Gewicht behandelt. Hierbei bleibt der Gang der Rechnung der gleiche bis zur Aufstellung der Gleichung (338). Vor der Integration dieser Gleichung hat man $p = 2\gamma a$ (γ das spezifische Gewicht der Scheibe) und a als $F(x)$ einzuführen. Stodola wählt

$$a = cx^n,$$

unter c und n konstante Zahlen verstanden, und zeigt, dass sich die Integration damit ohne besondere Schwierigkeiten durchführen lässt.

Ist die Profilform der Scheibe nicht bekannt, so kann man noch c und n so wählen, dass für zwei Punkte, etwa am Rand und in der Mitte, die gleiche Bruchgefahr entsteht, d. h. $\mathfrak{S}$ denselben Wert erhält. Man darf dann erwarten, eine nicht allzu verschiedene Anstrengung für verschiedene x zu erhalten. Die Aufgabe, eine Profilform so zu bestimmen, dass $\mathfrak{S}$ überall gleich gross wird, dürfte noch nicht gelöst sein.

Die biegungsfreie Gefässwand eines runden Wasserbehälters mit senkrechter Achse.

§ 96. Die mittlere Meridianlinie eines Behälters habe die Gleichung $z = F(x)$, und die X-Achse liege im Wasserspiegel. Die Wanddicke d sei so gering, dass in erster Annäherung das Gefässgewicht dem Wassergewicht gegenüber vernachlässigt werden kann. Legt man dann durch den Wasserkörper einen zylindri-

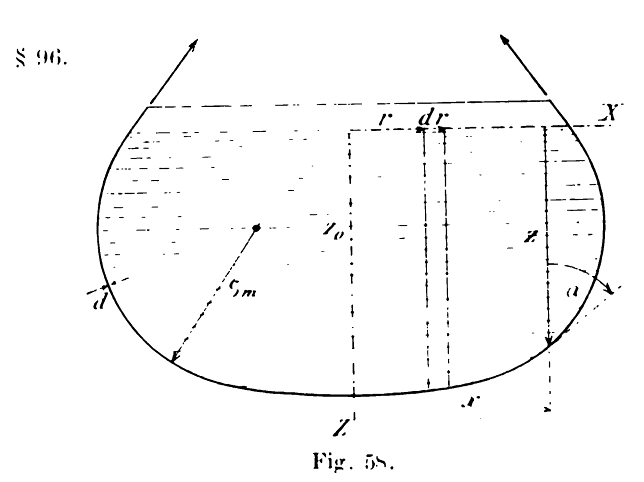


Fig. 58.

1) Stodola, Die Dampfturbinen, Berlin 1904.

[ein]en Schnitt vom Radius x, welcher durch die Wand normal, also als [K]egelfläche fortgesetzt ist, so ist $2\pi x d$ die Grösse der entstehenden Schnitt[flä]che in der Wand. Bedeutet σ_m die mittlere Meridianspannung, so ist [2]$\pi x d \sigma_m \cos\alpha$ die vertikale Komponente aller Meridianspannkräfte. Diese [m]uss mit dem Gewicht des durch den Schnitt umgrenzten Wasserkörpers

$$G = 2\pi\gamma \int_{r=0}^{r=x} z r \,\mathrm{d} r$$

[i]n Gleichgewicht stehen, unter $\gamma = 0{,}001$ kg/cbcm das spezifische Gewicht [d]es Wassers verstanden. Hieraus folgt

$$\sigma_m = \frac{\gamma}{d \cos\alpha} \frac{1}{x} \int_{r=0}^{r=x} z r \,\mathrm{d} r \quad [1] \tag{359}$$

Ausser der Meridianspannung, welche bei gegebener Gefässform nach [(3]59) berechnet werden kann, herrscht in der Wand noch eine Kreis[s]pannung σ_k und eine zur Wandfläche normale Spannung σ_n. Sind diese [S]pannungen Hauptspannungen, was bei biegungsfreier Beanspruchung an[zu]nehmen ist, so darf die Netzgleichung (99) angewandt werden. In der [F]orm

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_n}{\mathrm{d}n} + \frac{\sigma_m - \sigma_n}{\varrho_m} + \frac{\sigma_k - \sigma_n}{\varrho_k} = 0 \tag{360}$$

[be]deute $\mathrm{d}n$ ein von aussen nach innen gerichtetes Element der Wanddicke, [ϱ_m] den Krümmungsradius der Meridianlinie, ϱ_k den zweiten Hauptkrümmungsradius der Wandfläche. An der Aussenfläche ist $\sigma_n = 0$, innen dagegen $\sigma_n = -\gamma z$. Nimmt man an, dass der Druck von aussen nach innen [gl]eichförmig zunimmt, so ist

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_n}{\mathrm{d}n} = -\frac{\gamma z}{d}.$$

[W]ird sodann noch in Gleichung (360) σ_n gegenüber σ_m und σ_k vernach[lä]ssigt, σ_m und σ_k aber für die ganze Wanddicke konstant gesetzt, so folgt

$$\frac{\gamma z}{d} = \frac{\sigma_m}{\varrho_m} + \frac{\sigma_k}{\varrho_k}, \tag{361}$$

[ei]ne Gleichung, aus welcher z. B. nach (359) für gegebene Gefässformen [si]ch σ_k zu

---

1) Diese Gleichung stimmt überein mit Gleichung I nach Intze in der [S.] 133 angeführten Schrift; nur ist daselbst unser $(x_0 - x)$ mit x bezeichnet und [al]s unabhängige Veränderliche verwendet, wodurch die Gleichung zweigliedrig [wi]rd.

$$(362) \qquad \sigma_k = \frac{\gamma \varrho_k}{d}\left(z - \frac{1}{x \varrho_m \cos\alpha}\int\limits_{r=0}^{r=x} z r \,\mathrm{d}r\right)$$

berechnet werden kann.

Wasserbehälter ohne Kreisspannung.

§ 97. Aus Gleichung (362) lässt sich leicht erkennen, dass $\sigma_k = 0$ wird für

$$(363) \qquad \varrho_m = \frac{1}{x z \cos\alpha}\int\limits_{r=0}^{r=x} z r \,\mathrm{d}r, \quad [1]$$

dass es also im allgemeinen möglich sein wird, die Meridianlinie so zu wählen, dass keine Kreisspannungen vorhanden sind. Zur Ermittelung der Form kann folgendes Verfahren eingeschlagen werden:

Sind $x_0 = 0$, x_1, $x_2 \ldots x_n$ Glieder einer arithmetischen Reihe mit der kleinen Differenz Δx, so kann man näherungsweise setzen

$$\int\limits_{r=0}^{r=x} z r \,\mathrm{d}r = A_n = A_{n-1} + x_n z_n \Delta x\,,$$

also

$$\varrho_m \cos\alpha = \frac{A_{n-1} + x_n z_n \Delta x}{x_n z_n}\,.$$

Mit $x = 0$ beginnend, erhält man $\varrho_0 = \frac{0}{0}$, einen unbestimmten und überhaupt beliebigen Wert. Nimmt man für ϱ_0 irgend einen Wert an und schlägt einen Kreis bis x_1, so ist

$$\varrho_1 \cos\alpha_1 = \frac{x_1 z_1 \Delta x}{x_1 z_1} = \frac{A_1}{x_1 z_1}\,,$$

ein Ausdruck, dessen Grössen sämtlich bis auf ϱ_1 aus der Zeichnung entnommen werden können. Schlägt man mit ϱ_1, dessen Grösse sich aus der Gleichung berechnet, den Kreis bis $x = x_2$, so folgt weiter

$$\varrho_2 \cos\alpha_2 = \frac{A_1 + x_2 z_2 \Delta x}{x_2 z_2} = \frac{A_2}{x_2 z_2} \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man die Meridianlinie in dieser Weise fort, bis sie den Wasser-

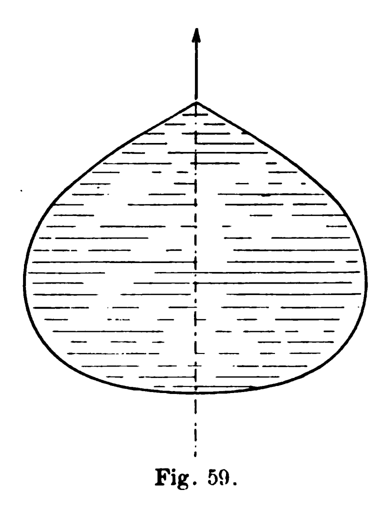
1) In dieser Gleichung ist die Lösung einer von Finsterwalder gestellten Preisaufgabe in der Zeitschrift der Mathematik und Physik 1898 S. 64 enthalten.

piegel erreicht, so können je nach der Wahl von ϱ_0 die folgenden beonderen Fälle eintreten:

Es kann werden

$$\text{für } z = 0\,, \qquad x \gtreqless 0\,, \qquad \alpha \gtreqless 90^0\,.$$

Soll für x oder α hier ein bestimmter Wert, etwa $x = 0$ oder $\alpha = 90^0$, rreicht werden, so ist ϱ_0 nicht mehr beliebig, sondern indirekt betimmt. ϱ_0 spielt die Rolle einer Integrationskonstanten, durch deren Wahl ine dieser Spiegelbedingungen erfüllt werden kann, wennschon nur durch ine Reihe von Versuchen mit verschielenen ϱ_0. Für $x = 0$ im Spiegel erhält las Gefäss die in Fig. 59 dargestellte }estalt eines umgekehrten Luftballons.


Fig. 59.

Die Bedingung $\sigma_k = 0$ hat in der Tat für den Luftballon praktische Beleutung, sie entspricht dem Zustand der Bildung leichter Meridianfalten in der Ballonhülle.

Für ein aus Metallblech hergestelltes efäss würde es keinen Zweck haben, iese Bedingung ganz oder näherungsreise zu erfüllen, es sei denn, dass leridianrippen zur Verstärkung der leche angebracht sind.

Für bestimmtes ϱ_0 bei gegebenem z_0 ergibt sich ein bestimmtes Vom. Bei konstantem Verhältnis zwischen ϱ_0 und z_0 erhält man geomeisch ähnliche Gefässformen. Da sich deren Volumina verhalten wie die itten Potenzen der ϱ_0 oder z_0, so ist es leicht, ein für beliebiges Volum ' gefundenes Gefäss für ein gewünschtes anderes Volum zu dimensionieren, nn es ist z. B.

$$z_0'' = z_0' \sqrt[3]{\frac{V''}{V'}}\,.$$

Wasserbehälter mit Meridian- und Kreisspannung.

§ 98. Mit Rücksicht auf die Poissonschen Gleichungen (104), welche für n vorliegenden Fall, wegen $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_1 = \sigma_m$, die Form

$$E\varepsilon_1 = \sigma_m - \frac{\sigma_k}{m}$$

annehmen, kann es vorteilhaft scheinen, σ_k möglichst gross, also, da es nicht grösser werden soll als σ_m,

$$\sigma_k \leqq \sigma_m$$

zu nehmen.

Führt man diese Bedingung in (361) ein, so folgt

$$\frac{1}{\varrho_m} + \frac{1}{\varrho_k} \geqq \frac{\gamma z}{\sigma_m d}$$

oder, nach (359),

$$\text{(364)} \qquad \frac{1}{\varrho_m} + \frac{1}{\varrho_k} \geqq \frac{x z}{\int\limits_{r=0}^{r=x} z r \, \mathrm{d} r} \cos \alpha .$$

Auch diese Gleichung kann analog dem vorigen Beispiel behandelt werden, indem man für jedes neue Interval Δx denjenigen Wert für ϱ_m durch Probieren sucht, welcher die Gleichung erfüllt. Dabei kann ϱ_k als Krümmungskreis des Tangentenkegels zu $\varrho_k = \frac{x}{\cos \alpha}$ gefunden werden, da nach dem Meusnierschen Satze[1]) der Krümmungsmittelpunkt für das Scheitelelement des zur Mantellinie normalen Kegelschnittes in der Achse des Kegels liegt.

Beanspruchung des Behälters bei teilweiser Füllung.

§ 99. Ist in einem der vorher besprochenen Fälle bei ganzer Füllung des Behälters $\sigma_k = 0$ oder $\sigma_k = \sigma_m$, so wird σ_k mit sinkendem Wasserspiegel kleiner. Vermindert sich z. B. z um c, so geht Gleichung (362) über in

$$\sigma_k = \frac{\gamma \varrho_k}{d} \left[z - c - \frac{1}{x \varrho_m \cos \alpha} \int\limits_{r=0}^{r=x} (z - c) r \, \mathrm{d} r \right]$$

oder

$$\sigma_k = \frac{\gamma \varrho_k}{d} \left[z - c - \frac{1}{x \varrho_m \cos \alpha} \left(\int\limits_{r=0}^{r=x} z r \, \mathrm{d} r - \frac{c x^2}{2} \right) \right],$$

endlich, mit der Bezeichnung σ_k^* für $c = 0$,

1) S. Mémoire sur la courbure des surfaces, Mémoires des Savants étrangers t. 10 (lu 1776) 1785.

(365) $$\sigma_k = \sigma_k^* - \frac{\gamma \varrho_k c}{d}\left(1 - \frac{x}{2\varrho_m \cos\alpha}\right).$$

Hiernach kann bei teilweiser Füllung für $\sigma_k^* = 0$, d. h. wenn der volle Behälter keine Kreisspannung hat, bei teilweiser Füllung

(366) $$\sigma_k = \frac{\gamma \varrho_k c}{d}\left(\frac{x}{2\varrho_m \cos\alpha} - 1\right)$$

positiv oder negativ werden, und zwar ist $\sigma_k \gtrless 0$ für $x \gtrless 2\varrho_m \cos\alpha$. Dieser Umstand ist wohl zu beachten.

Beanspruchung von Ringkanten.

§ 100. Eine sehr wichtige Folgerung ergibt sich noch aus (361) für $\varrho_m = 0$, d. h. für den Fall einer Ecke in der Meridianlinie, also einer Kante in der Wandfläche. Dann ist offenbar

$$\sigma_k = +\infty,$$

woraus folgt, dass solche Kanten bei einer Behälter-Konstruktion vermieden werden müssen, es sei denn, dass die Ringkante die Angriffslinie einer über die Ringkante verteilten Kraft ist. Wenn $\mathfrak{p}$ die Grösse einer Ringkraft pro Längeneinheit bedeutet, so ist $\mathfrak{p}$ an die Gleichung gebunden

(367) $$\mathfrak{p} = 2\sigma_m d \sin\delta,$$

zu deren Begründung ein Blick auf die Zerlegung der Kräfte nach Fig. 60 genügt, in welcher 2δ den Winkel bedeutet, welchen die Meridianlinie an der Ringkante bildet. Dieser Fall liegt insbesondere an den Auflagekanten der Intze-Behälter[1]) vor.

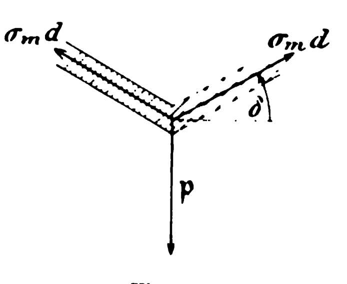


Fig. 60.

1) S. Forchheimer: Über eiserne Wasser-, Öl- und Gasbehälterbassins nach den Berechnungen und Konstruktionen des Professors Intze in Aachen, Schillings Journal für Gasbeleuchtung 1884, S. 705.

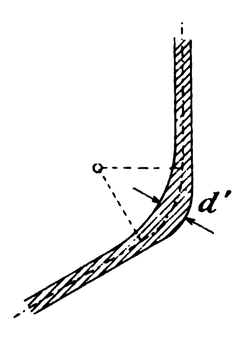


Fig. 61.

Kanten, an denen Ringkräfte nicht vorhan sind, müssen kräftige Verstärkungsringe erhalt welche gewöhnlich aus Winkeleisen gebildet wer die als Ersatz für eine Zone von der Form Fig. dienen, für welche ρ_m nicht 0 ist, sondern kleine endliche Grösse hat, deren Wanddicke sich nach den angegebenen Gleichungen berecl lässt. Aus (367) geht zugleich hervor, dass j Ringkraft ein gewisser Meridianwinkel 2δ sprechen muss, wenn die Wand biegungsfrei spannt sein soll.

Kegelförmige Wasserbehälter.

§ 101. Ist die Wand kegelförmig, so wird $\rho_m = \infty$, also nach (361)

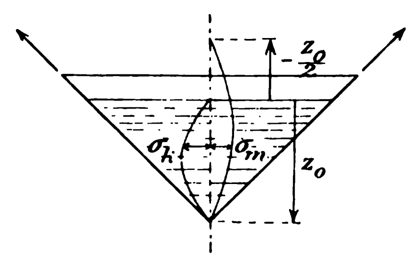


Fig. 62.

$$\sigma_k = \frac{\gamma z}{d} \rho_k ,$$

oder, wenn nach dem Meusn schen Satze (s. Anm. S. 132)

$$\rho_k = (z_0 - z) \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \alpha}$$

gesetzt wird,

$$\sigma_k = \frac{\gamma}{d} (z_0 z - z^2) \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \alpha} . \tag{368}$$

Hiernach ist

$$\sigma_k = 0 \quad \text{für} \quad z = z_0 \quad \text{und} \quad z = 0 ,$$

und es findet ein Maximum statt:

$$\operatorname{Max} \sigma_k = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{d} z_0^2 \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{für} \quad z = \frac{1}{2} z_0 . \tag{369}$$

Ferner ist $z = z_0 - r \operatorname{ctg} \alpha$ also (s. Gleichung 359)

$$\int_{r=0}^{r=x} z r \,\mathrm{d} r = \int_{r=0}^{r=x} r (z_0 - r \operatorname{ctg} \alpha) \,\mathrm{d} r = z_0 \int_{r=0}^{r=x} r \,\mathrm{d} r - \operatorname{ctg} \alpha \int_{r=0}^{r=x} r^2 \mathrm{d} r ,$$

oder

$$\int_{r=0}^{r=x} z r \, dr = \frac{z_0 x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \operatorname{ctg} \alpha$$

und damit nach (359)

$$370) \qquad \sigma_m = \frac{\gamma}{d}\left(\frac{z_0 x}{2 \cos \alpha} - \frac{x^2}{3 \sin \alpha}\right).$$

Hiernach ist, sofern $x = (z_0 - z) \operatorname{tang} \alpha$, $\sigma_m = 0$ erstens für $z = z_0$ und zweitens für den imaginären [1]) Punkt $z = -\frac{1}{2} z_0$.

In der reellen Strecke zwischen $z = z_0$ und $z = 0$ bleibt σ_m immer positiv, und es findet statt ein Maximalwert

$$371) \qquad \operatorname{Max} \sigma_m = \frac{3}{16} \frac{\gamma}{d} z_0^2 \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{für} \quad z = \frac{1}{4} z_0 .$$

Die für σ_k und σ_m gefundenen 3 Punkte genügen bereits zur Verzeichnung von Kurven (Parabeln) für σ_k/z und σ_m/z, aus denen sich weiter nach den Gleichungen

$$E \varepsilon_1 = \sigma_m - \frac{\sigma_k}{m}, \qquad E \varepsilon_2 = \sigma_k - \frac{\sigma_m}{m}$$

die Zerrungen als Kurven darstellen lassen. Im Besitz dieser 4 Kurven kann man sich weiter entschliessen, ob man d mit Rücksicht auf Zerrung oder auf Spannung berechnen will (s. § 124), und ob man etwa zur Erzielung gleichmässigerer Anstrengung die Wand aus Zonen von verschiedener Blechdicke zusammensetzen will.

Kugelförmige Wasserbehälter.

§ 102.

Bei kugelförmiger Wand wird $\varrho_m = \varrho_k$, so nach (361), wenn für ϱ_m und ϱ_k einfach ϱ gesetzt wird,

$$372) \qquad \frac{\gamma z}{d} = \frac{1}{\varrho} (\sigma_m + \sigma_k) .$$

Mit $r = \varrho \cos \alpha$ und $z = z_0 - \varrho (1 - \sin \alpha)$ erhält man für die Halbkugel Fig. 63

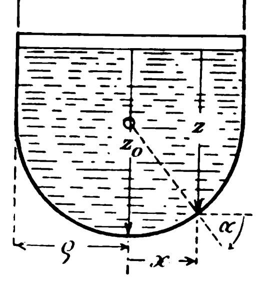


Fig. 63.

1) Imaginär, weil die Wandfläche nicht soweit reicht, und weil das Resultat einen über dem Spiegel negativen Druck voraussetzt, was der Wirklichkeit nicht entspricht.

$$\int\limits_{r=x}^{r=x} z r \,\mathrm{d} r = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varrho \cos\alpha \left[z_0 - \varrho(1 - \sin\alpha)\right] \mathrm{d}(\varrho \cos\alpha),$$

$$\int\limits_{r=0}^{r=x} z r \,\mathrm{d} r = \varrho^2(\varrho - z_0)\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin\alpha \cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha - \varrho^3 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin^2\alpha \cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha .$$

Führt man die Integration aus und setzt den gefundenen Wert in 359 ein, so erhält man, mit $x = \varrho \cos\alpha$

$$\sigma_m = \frac{\gamma \varrho}{d}\left(\frac{z_0 - \varrho}{2} + \frac{\varrho}{3}\,\frac{1 - \sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}\right),$$

und weiter nach (372), da $z = z_0 - \varrho(1 - \sin\alpha)$,

$$\sigma_k = \frac{\gamma \varrho}{d}\left(\frac{z_0 - \varrho}{2} + \frac{\varrho}{3}\,\frac{\sin^3\alpha + 3 \sin\alpha \cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha}\right).$$

Mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ergeben beide Gleichungen nach Beseitigung der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ für den tiefsten Punkt denselben Wert

$$\sigma_0 = \frac{\gamma z_0 \varrho}{2d},$$

welcher für $z = z_0$ und $\sigma_m = \sigma_k$ auch aus (372) hervorgeht. Diese Spannu ist die grösste in der Halbkugel vorkommende. Für $\alpha = 0$ erhält man

$$\sigma_m = \sigma_0\left(1 - \frac{\varrho}{3 z_0}\right), \qquad \sigma_k = \sigma_0\left(1 - \frac{5 \varrho}{3 z_0}\right)\text{[1]}.$$

Beanspruchung einer krummen Wand durch überall gleichen Normaldruck.

§ 103. Handelt es sich wieder um einen Rotationskörper, so folgt, indem durch p ersetzt wird, aus (359) und aus (362)

$$(373) \qquad \sigma_m = \frac{p}{2d \cos\alpha}\,x, \qquad \sigma_k = \frac{p}{d}\,\varrho_k\left(1 - \frac{x}{2 \varrho_m \cos\alpha}\right);$$

[1] Barkhausen, welcher die hier entwickelten Formeln für Kugelbö wennschon in etwas anderer Form, in einem Vortrag über „Neuere Formen Flüssigkeitsbehälter", Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1890 S. 1 mitteilt, weist besonders darauf hin, dass $z_0 > \frac{5}{3}\varrho$ sein muss, damit die K spannungen nicht negativ werden, d. h. keine Druckspannungen entste können. Aus obiger Gleichung geht dies unmittelbar hervor.

B. für eine **Kugelfläche**,

$$\text{mit} \quad \varrho_m = \varrho_k = \varrho \quad \text{und} \quad x = \varrho \cos\alpha \, ,$$

74) $$\sigma_m = \sigma_k = \frac{p\varrho}{2d} \, ,$$

›nach für die überall und nach allen Wandrichtungen gleiche Zerrung folgt:

75) $$E\varepsilon_1 = E\varepsilon_2 = \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{p\varrho}{d} \, .$$

Für einen **Kreiszylinder** wird $\varrho_m = \infty$, also nach (361)

76) $$\sigma_k = \frac{p\varrho_k}{d} \, .$$

Hierbei sei hervorgehoben, dass p auch negativ sein kann, was einem isseren Überdruck entspricht und einen negativen Wert σ_k, d. h. Druckannung in der Kreislinie, zur Folge hat. Gleichung (376) gilt daher r zylindrische Dampf- oder Gasbehälter, sowohl bei innerem wie bei isserem Überdruck, wennschon unter Vernachlässigung der Bodenwirkung, i deren Berücksichtigung die Aufgabe einen durchaus anderen Charakter winnt.[1])

Die zylindrische Wand bildet den Übergang vom wandförmigen Körper im gekrümmten Stab. Ein zylindrischer wandförmiger Körper kann offenır auch als gekrümmter Stab aufgefasst und demgemäss berechnet werden, as auch dann ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist, wenn der Zyıder unrund ist, oder, wenn eine ungleichmässige Druckverteilung stattıdet. In beiden Fällen ergibt sich nicht reine Zugbeanspruchung, sondern ıg und Biegung.

Die Festigkeit der Gewölbe.

§ 104. Die im Bauwesen gebräuchlichen Gewölbe aus natürlichem oder künstliem Stein sind Wandkörper, bei deren Belastung man bemüht ist, einen glichst biegungsfreien Spannungszustand herbeizuführen. Ist diese Abht erreicht, so gibt sich dies bei Aufsuchung der sogenannten Stützien oder Stützflächen dadurch zu erkennen, dass dieselben mit der ıtrallinie des Gewölbes oder der Mittelfläche zusammenfallen.

Biegungsspannungen werden um so leichter entstehen, je kleiner die ümmung der Wölbfläche ist. Sind beide Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und

1) s. **Grashof**, Theorie der Elastizität und Festigkeit S. 337.

ϱ_2 unendlich, so entsteht die ebene Platte, die man nicht mehr als Gewölbe bezeichnen kann. Dieser ungünstigste Fall scheidet daher an dieser Stelle aus. Ist einer der beiden Krümmungsradien unendlich, so entsteht das zylindrische oder Tonnengewölbe, dessen Theorie auf den gekrümmten Stab zurückführt (s. § 103).

Bei doppelt gekrümmten Gewölben wird sich am leichtesten der biegungsfreie Zustand annähern lassen. Je vollkommener dies gelingt, um so richtiger wird man den Spannungszustand unter Zuhilfenahme der Netzgleichung (99) beurteilen können. Im Unterschied zu den Gefässwänden sind die auf ein Gewölbe wirkenden Kräfte im allgemeinen nicht normal zur Wölbfläche. Bildet daher die Belastung p der Flächeneinheit mit der Fläche den Winkel α, so ergibt sie nur die Normalkomponente $p \sin\alpha$. Hiernach erhält man unter Vernachlässigung der Komponente $p \cos\alpha$ die mit (361) analog gebildete Netzgleichung

$$\frac{p \sin\alpha}{d} + \frac{\sigma_1}{\varrho_1} + \frac{\sigma_2}{\varrho_2} = 0 ,$$

unter d die Wölbdicke verstanden.

Ist das Gewölbe ein Rotationskörper, so erhält man wieder eine mit (359) analog gebildete Gleichung zur Berechnung der Meridianspannung, nach deren Kenntnis auch die Kreisspannung gefunden werden kann.

Da es üblich ist, die Gewölbe graphostatisch zu berechnen, so kann davon abgesehen werden, diese Aufgaben ins einzelne zu verfolgen; auch wird es, nachdem die Analogie mit der Berechnung eines Wasserbehälters erkannt ist, keine Schwierigkeit haben, das dort benutzte Verfahren zu übertragen.

Eine Reihe verdienstvoller Versuche mit Gewölben, darunter 5 grossen Gewölben aus Bruchsteinmauerwerk, Ziegelmauerwerk, Stampfbeton, ferner mit einem Moniergewölbe und einer eisernen Bogenbrücke, sämtlich von 23 m Spannweite, im Auftrag des Österr. Ingenieur- und Architektenvereins ausgeführt, sind in dem Jahrgang 1895 der Zeitschrift dieses Vereins Nr. 20 bis 34 ausführlich beschrieben. In den daran angeschlossenen Berechnungen wird das Gewölbe als elastischer Bogen aufgefasst.

Bei allen hierher gehörigen Aufgaben ist meist die Bedingung zu erfüllen, dass σ_1 und σ_2 nicht grösser als 0 werden, dass also nur Druckspannungen stattfinden, da das Steinmaterial für Zugspannung unzuverlässig ist.

VIII. Abschnitt.

Körper von gedrungener Form.

Allgemeine Vorbemerkungen.

§ 105. Wie schon in § 2 bemerkt, begegnet hier die rechnerische Ermittelung des Deformations- und des Spannungszustandes den grössten Schwierigkeiten. Während dieser ohne grossen Fehler bei den stabförmigen und bei den wandförmigen Körpern als ein- oder zweiachsiger aufgefasst werden konnte, ist bei den nach drei Dimensionen entwickelten Körpern nur in Ausnahmefällen eine ähnliche Vereinfachung zulässig. Von solchen Fällen abgesehen, sind nur wenige Aufgaben mit dreiachsiger Spannung einer strengeren Berechnung zugänglich. Dieser Nachteil ist, wie schon § 2 angedeutet, nicht so gross, wie es wohl scheinen könnte, da einerseits neben der allgemeinen Berechnungsweise immer noch ein Rechnungsweg zur Verfügung steht, welcher den Spezialversuch mit ähnlichen Körperformen zum Ausgang nimmt, andererseits aber die Fälle in der Technik nicht gerade häufig sind, in denen man die Anwendung ganz unberechenbarer Körperformen nicht vermeiden kann. Dann aber handelt es sich meist um Gegenstände von nicht erheblicher Grösse, welche ohne grossen Verlust viel stärker als nötig gemacht, oder welche auf dem Wege des Experiments vor ihrer Verwendung geprüft werden können, oder um solche, die infolge massenhafter Verwendung unter Ausnutzung guter und schlechter Erfahrungen nach und nach richtige Abmessungen und Formen empfangen haben.

Nicht selten sind auch gerade bei den hierher gehörigen Körpern die äusseren für den Spannungszustand massgebenden Bedingungen so wenig bekannt, dass sie nur geschätzt werden können.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt zunächst mit einigen Fällen, in denen der allgemeine Rechnungsweg angewandt werden kann, um sodann im folgenden Abschnitt den Weg des Spezialversuchs zu erörtern.

Spannungszustand in einem hohlen Kreiszylinder mit parallelen Endflächen bei Paralleldehnung und gleichmässigem Manteldruck.

§ 106. Wenn die Länge s des Zylinders durch Parallelbewegung der Endflächen um den Betrag Δs vergrössert wird, so nimmt jedes zur Achse parallele Faserelement an dieser Verlängerung mit dem Betrage $\varepsilon_x ds$ teil, und es ist

$$\int \varepsilon_x ds = \Delta s.$$

Hätte überall ε_x den konstanten Wert ε_1, so würde, wie in § 47 angenommen wurde, $\varepsilon_1 = \frac{\Delta s}{s}$. Lässt sich auch diese Annahme im Innern des Körpers nicht prüfen, so ist sie doch wahrscheinlich genug, um hier als Deformationshypothese eingeführt zu werden. Diese Hypothese würde auch das Parallelbleiben der Querschnitte zur Folge haben.

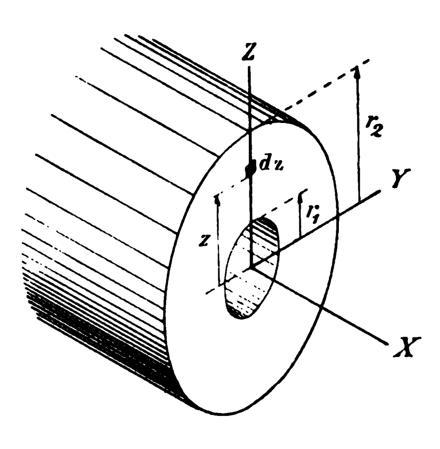


Fig. 64.

Für ein in der XZ-Ebene Fig. 64 liegendes inneres Element sind dann $\varepsilon_x = \varepsilon_1$, ε_y und ε_z Hauptdehnungen. Ist ζ die Verlängerung von z, so erfährt die Kreislinie $2\pi z$ die Verlängerung $2\pi\zeta$, sonach ist $\varepsilon_y = \frac{\zeta}{z}$. Die Vergrösserung eines Längenelements dz ist $\frac{d\zeta}{dz}dz$, sonach die relative Dehnung $\varepsilon_z = \frac{d\zeta}{dz}$. Für die drei Hauptdehnungen ist somit

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_y = \frac{\zeta}{z}, \qquad \varepsilon_z = \frac{d\zeta}{dz}. \tag{377}$$

Daraus folgt weiter für die Volumdehnung

$$e = \varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} \tag{378}$$

und für die Poissonschen Gleichungen (106)

$$(379)\quad \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{m}{m+1}\left(\varepsilon_1 + \dfrac{e}{m-2}\right)E\,, \\ \sigma_y = \dfrac{m}{m+1}\left(\dfrac{\zeta}{z} + \dfrac{e}{m-2}\right)E\,, \\ \sigma_z = \dfrac{m}{m+1}\left(\dfrac{d\zeta}{dz} + \dfrac{e}{m-2}\right)E\,. \end{cases}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt durch Differenzieren:

$$(380)\quad \frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{mE}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{d^2\zeta}{dz^2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\right].$$

Da unter den gemachten Annahmen die Hauptspannungen des Elements die Richtung der Koordinatenachsen haben, so gelten hier die Netzgleichungen (99), und diejenige, welche für das gedachte Element das Gleichgewicht nach z ausdrückt, lautet, da der eine Krümmungsradius z, der andere ∞ ist,

$$(381)\quad \frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z}(\sigma_y - \sigma_z)\,.$$

Führt man für $\frac{d\sigma_z}{dz}$, σ_y, σ_z die Ausdrücke aus (379) und (380) ein, so folgt nach Division mit $\frac{m}{m+1}E$

$$\frac{1}{m-2}\frac{d}{dz}\left(\frac{\zeta}{z}\right) + \frac{m-1}{m-2}\frac{d^2\zeta}{dz^2} = \frac{1}{z}\left(\frac{\zeta}{z} - \frac{d\zeta}{dz}\right),$$

und, nach weiterer Vereinfachung,

$$(382)\quad d\left(\frac{\zeta}{z}\right) + d\left(\frac{d\zeta}{dz}\right) = 0\,.$$

Die erste Integration dieser Gleichung ergibt

$$(383)\quad \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} = \text{konstant}\,,$$

und, da die linke Seite nach (377) $\varepsilon_y + \varepsilon_z$, d. i. die Flächendehnung im Querschnitt ausdrückt, so erweist sich diese nach (383) als konstant. Da auch ε_1 als konstant angenommen und $\varepsilon_1 + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e$ die Expansion ist, so ist auch diese in dem Körper überall gleich gross. Die konstante Flächendehnung kann auch mit $e - \varepsilon_1$ bezeichnet und in (383) an Stelle der Integrationskonstante gesetzt werden. Damit ergibt sich

$$(384)\quad \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} = e - \varepsilon_1\,.$$

Multipliziert man beiderseits mit $z\,\mathrm{d}z$, so folgt

$$\zeta\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}\zeta = (e - \varepsilon_1)\,z\,\mathrm{d}z\,,$$

oder

$$\mathrm{d}(\zeta z) \qquad = (e - \varepsilon_1)\,z\,\mathrm{d}z\,,$$

und nach einer zweiten Integration:

$$\zeta z = (e - \varepsilon_1)\frac{z^2}{2} + C\,. \tag{385}$$

Hiernach ergeben sich die Dehnungen

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\zeta}{z} = \frac{e - \varepsilon_1}{2} + \frac{C}{z^2}\,,\\ \varepsilon_z &= \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{e - \varepsilon_1}{2} - \frac{C}{z^2}\,, \end{aligned}\right. \tag{386}$$

welche in den Gleichungen (379) vorkommen und, daselbst eingef diesen die Form geben:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right),\\ \sigma_y &= \frac{m}{m+1}E\left(-\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{m}{2(m-2)}e + \frac{C}{z^2}\right),\\ \sigma_z &= \frac{m}{m+1}E\left(-\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{m}{2(m-2)}e - \frac{C}{z^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{387}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen kann man e und C bestim indem man sie auf die Randpunkte

$$\begin{aligned} z &= r_1 \quad \text{mit} \quad \sigma_z = -p_1\\ z &= r_2 \quad\;\; „ \quad\;\; \sigma_z = -p_2 \end{aligned}$$

anwendet. Zunächst erhält man

$$\begin{aligned} \frac{m+1}{mE}p_1 &= -\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{m}{2(m-2)}e - \frac{C}{r_1^2}\,,\\ \frac{m+1}{mE}p_2 &= -\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{m}{2(m-2)}e - \frac{C}{r_2^2}\,, \end{aligned}$$

und weiter

$$\left\{\begin{aligned} C &= \frac{m+1}{mE}(p_1 - p_2)\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\\ e &= \frac{2}{E}\,\frac{(m+1)(m-2)}{m^2}\,\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{m-2}{m}\varepsilon_1\,. \end{aligned}\right. \tag{388}$$

'ührt man diese Konstanten in (387) ein, so folgt

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= E\varepsilon_1 + \frac{2}{m}\,\frac{p_1 r_1^{\,2} - p_2 r_2^{\,2}}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\,,\\
\sigma_y &= \frac{p_1 r_1^{\,2} - p_2 r_2^{\,2}}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}} + \frac{(p_1 - p_2)}{z^2}\,\frac{r_1^{\,2} r_2^{\,2}}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\,,\\
\sigma_z &= \frac{p_1 r_1^{\,2} - p_2 r_2^{\,2}}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}} - \frac{(p_1 - p_2)}{z^2}\,\frac{r_1^{\,2} r_2^{\,2}}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\,.
\end{aligned}
$$

Paralleldehnung ohne Manteldruck.

ie Gleichungen (389) enthalten das bemerkenswerte Resultat, dass σ_y § 107.
: nicht von ε_1 abhängig sind. Wäre z. B. p_1 und $p_2 = 0$, also
innen noch aussen ein Manteldruck vorhanden, so wird

$$\sigma_x = E\varepsilon_1\,, \quad \sigma_y = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_z = 0\,.$$

t ist für einen Hohlzylinder bewiesen, dass die Parallelbewegung
ıdflächen nur einen einachsigen Spannungszustand hervorruft, wie in
zunächst ohne Beweis, für jeden prismatischen Stab angenommen
Da r_1 ganz beliebig ist, so kann der Fall $r_1 = 0$ kaum eine
ıme bilden. Das eben gefundene Resultat gilt sonach auch für einen
Kreiszylinder, der Spannungszustand ist also einachsig. Dieses
.t ist durchaus nicht unmittelbar einleuchtend. Vielmehr liegt die
tige) Meinung nahe, dass infolge der Querkontraktion auch Quer-
ngen entstehen.

ır $p = 0$ findet man

$$\varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_1}{m}\,, \qquad \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_1}{m}\,,$$

hervorgeht, dass die Poissonsche Konstante, welche mittels
rversuchs für die Oberfläche gefunden wird, auch für das Innere des
ls gilt.

, σ_x nach (387) überall denselben Wert hat, so ist dies auch für
lflächen der Fall. Diese Voraussetzung lässt sich experimentell nur
verwirklichen und überhaupt nicht bei Zugversuchen, da man hier,
ı Stab einzuspannen, Verstärkungsköpfe anbringen oder Reibung
.usseren Druck hervorbringen muss, so dass $p \neq 0$ ist. Hierdurch
es sich, dass sich bei Experimentierstäben an den Enden meist ein

etwas anderes Verhalten ergibt als in den mittleren Teilen. Bei Druckversuchen entsteht an den Endflächen eine gewisse radiale Reibung, so dass auch hier der Zustand nicht streng der vorauszusetzende sein wird.

Beanspruchung des Zylinders durch inneren oder äusseren Druck.

§ 108. Weitere Spezialfälle ergeben sich für $p_2 = 0$ und $p_1 \neq 0$ oder für $p_1 = 0$ und $p_2 \neq 0$.

Im ersten Falle, d. h. bei einem Zylinder von nur innerem Druck wird

$$(390) \quad \begin{cases} \sigma_r = E\varepsilon_1 + \frac{2}{m}\frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \text{ (unabhängig von } z), \\ \text{Max}\,\sigma_y = \frac{p_1(r_1^2 + r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{für} \quad z = r_1. \end{cases}$$

Für σ_z erhält man mit $z = r_1$ den der Annahme entsprechenden Wert

$$\sigma_z = -p_1.$$

Unter Benutzung der Gleichung (110)

$$(391) \quad E\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_r}{m}$$

erhält man ferner, wenn $\sigma_r = 0$ ist, für $z = r_1$

$$(392) \quad E\varepsilon_y = p_1\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1}{m}\right)$$

oder, mit der Abkürzung $E\varepsilon_y = \mathfrak{S}$,

$$(393) \quad \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{m\mathfrak{S} + (m-1)p_1}{m\mathfrak{S} - (m+1)p_1}.$$

Bei äusserem Druck, also $p_1 = 0$, wird

$$(394) \quad \begin{cases} \sigma_r = E\varepsilon_1 - \frac{2}{m}\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \text{ (unabhängig von } z), \\ -\sigma_y = \frac{2 p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{für } z = r_1, \end{cases}$$

ferner, für $\sigma_r = 0$,

$$
\left.\begin{aligned}
E\varepsilon_x &= \frac{2}{m}\,\frac{p_2 r_2^{\,2}}{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}} \quad \text{für} \quad z = r_1 \\
-E\varepsilon_y &= 2\,\frac{p_2 r_2^{\,2}}{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}} \quad \text{„} \quad \text{„ „ „} \\
E\varepsilon_z &= \frac{2}{m}\,\frac{p_2 r_2^{\,2}}{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}} \quad \text{„} \quad \text{„ „ „}\,.
\end{aligned}\right\} \quad 5)
$$

Hier wird $E\varepsilon_x = E\varepsilon_z$ die grösste Zerrung. Diese gleich $\mathfrak{S}$ gesetzt , wenn $\mathfrak{S}$ nicht überschritten werden soll,

$$
6)\qquad \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \geqq \frac{m\mathfrak{S}}{m\mathfrak{S} - 2p_2}\,.
$$

Soll ein gewisser Grenzwert von $-E\varepsilon_y$, er heisse $\mathfrak{P}$, nicht über- itten werden, so folgt

$$
7)\qquad \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \geqq \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P} - 2p_2}\,.
$$

Für einen Vollzylinder, d. h. $r_1 = 0$, wird hiernach

$$
8)\qquad \mathfrak{S} = \frac{2p_2}{m}\,, \qquad \mathfrak{P} = 2p_2\,.
$$

Dickwandige Hohlkugel.

§ 109. r_1 sei der innere, r_2 der äussere Radius, p_1 der innere, p_2 der sere Flächendruck. Betrachten wir ein der Z-Achse liegendes elastisches Element, . 65, so gehe dessen ursprüngliche Koordi- z über in $z + \zeta$. Hieraus folgt (s. § 106)

$$
\text{)}\quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\zeta}{z}\,, \quad \varepsilon_z = \frac{d\zeta}{dz}\,, \quad e = 2\frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}\,.
$$

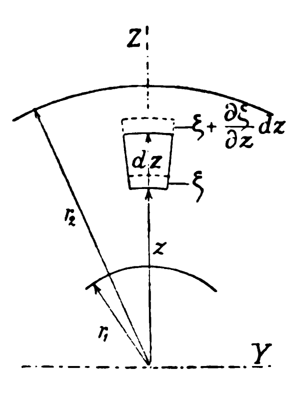


Fig. 65.

Da ferner die Kugel mit dem Radius z Netzfläche, der Radius selbst aber eine linie ist, so gilt die Netzgleichung (99), he, da nach der Vorzeichenregel S. 38 $= -z$ ist, im vorliegenden Falle lautet

$$
\text{)}\quad \frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{2}{z}(\sigma_x - \sigma_z)\,.
$$

Nach (399) und (110) folgt weiter

$$(401)\quad \begin{cases} \sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \dfrac{e}{m-2}\right) = \dfrac{2G}{m-2}\left(\dfrac{d\zeta}{dz} + m\dfrac{\zeta}{z}\right), \\ \sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \dfrac{e}{m-2}\right) = \dfrac{2G}{m-2}\left((m-1)\dfrac{d\zeta}{dz} + 2\dfrac{\zeta}{z}\right) \end{cases}$$

und hieraus

$$(402)\quad \sigma_x - \sigma_z = -2Gz\frac{d}{dz}\left(\frac{\zeta}{z}\right),$$

sowie

$$(403)\quad \frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{2G}{m-2}\left((m-1)\frac{d^2\zeta}{dz^2} + 2\frac{d\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{dz}\right).$$

Mit Einführung der Ausdrücke (402) und (403) in Gleichung (4 folgt sodann

$$(m-1)\frac{d^2\zeta}{dz^2} + 2\frac{d}{dz}\left(\frac{\zeta}{z}\right) = -2(m-2)\frac{d}{dz}\left(\frac{\zeta}{z}\right)$$

oder

$$(404)\quad d\left(\frac{d\zeta}{dz}\right) + 2\,d\left(\frac{\zeta}{z}\right) = 0,$$

integriert, unter e zunächst nur die Integrationskonstante verstanden,

$$(405)\quad \frac{d\zeta}{dz} + 2\frac{\zeta}{z} = e.$$

Da nach (399) die linke Seite dieser Gleichung die Expansion (s. § 10), zeigt sonach (405), dass die Expansion konstant, d. h. u hängig von z ist.

Indem wir die Gleichung (405) mit z^2dz multiplizieren, erhalten

$$z^2d\zeta + 2\zeta z\,dz = ez^2dz$$

oder

$$d(z^2\zeta) = ez^2dz.$$

integriert

$$z^2\zeta = e\frac{z^3}{3} + C$$

oder

$$(406)\quad \frac{\zeta}{z} = \frac{e}{3} + \frac{C}{z^3},$$

endlich, aus (405) und (406),

$$(407)\quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{e}{3} - 2\frac{C}{z^3}.$$

Mit Einführung der Ausdrücke (406) und (407) erhält man aus (401)

$$
\begin{cases}
\sigma_x = 2\,G\left(\dfrac{m+1}{m-2}\,\dfrac{e}{3} + \dfrac{C}{z^3}\right), \\[2ex]
\sigma_z = 2\,G\left(\dfrac{m+1}{m-2}\,\dfrac{e}{3} - 2\,\dfrac{C}{z^3}\right),
\end{cases}
\tag{408}
$$

B. für $m = 4$:

$$
\sigma_x = \frac{5}{3}\,Ge + \frac{2\,GC}{z^3}, \qquad \sigma_z = \frac{5}{3}\,Ge - \frac{4\,GC}{z^3}. \tag{409}
$$

Die noch unbestimmten Konstanten e und C folgen aus den Rand-dingungen:

$$
\sigma_z = -\,p_1 \quad \text{für} \quad z = r_1\,,
$$

$$
\sigma_z = -\,p_2 \quad \text{„} \quad z = r_2\,.
$$

Hiermit ergeben die Gleichungen (409)

$$
\frac{5}{3}\,e - \frac{4\,C}{r_1^{\,3}} = -\,\frac{p_1}{G}, \qquad \frac{5}{3}\,e - \frac{4\,C}{r_2^{\,3}} = -\,\frac{p_2}{G},
$$

nd man erhält

$$
\frac{5}{3}\,Ge = \frac{p_1 r_1^{\,3} - p_2 r_2^{\,3}}{r_2^{\,3} - r_1^{\,3}}, \qquad 4\,GC = \frac{(p_1 - p_2)\,r_1^{\,3} r_2^{\,3}}{r_2^{\,3} - r_1^{\,3}}. \tag{410}
$$

Hohlkugel mit innerem Überdruck.

§ 110. Für Kugeln mit innerem Druck kann der äussere, p_2, meist ver-achlässigt werden. Dann wird

$$
\frac{5}{3}\,Ge = \frac{p_1 r_1^{\,3}}{r_2^{\,3} - r_1^{\,3}}, \qquad 4\,GC = \frac{p_1 r_1^{\,3} r_2^{\,3}}{r_2^{\,3} - r_1^{\,3}},
$$

d nach (409) erhält man die von m unabhängigen Ausdrücke

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{p_1 r_1^{\,3}}{r_2^{\,3} - r_1^{\,3}}\left(1 + \dfrac{r_2^{\,3}}{2\,z^3}\right), \\[2ex]
\sigma_z = \dfrac{p_1 r_1^{\,3}}{r_2^{\,3} - r_1^{\,3}}\left(1 - \dfrac{r_2^{\,3}}{z^3}\right).
\end{cases}
\tag{411}
$$

Die Zerrungen $E\varepsilon_x$ und $E\varepsilon_y$ sind nach (399) einander gleich, also nach (110) $\sigma_y = \sigma_x$ und weiter

$$
E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}, \qquad E\varepsilon_z = \sigma_z - 2\,\frac{\sigma_x}{m}.
$$

oder nach (411) mit $m = 4$

$$(412)\quad \begin{cases} E\varepsilon_x = \dfrac{p_1 r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8}\dfrac{r_2^3}{z^3}\right), \\ E\varepsilon_z = \dfrac{p_1 r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{4}\dfrac{r_2^3}{z^3}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass wegen $z < r_2$ der Wert $E\varepsilon_z$ st negativ ist. Derselbe kommt für die Festigkeit nicht in Betracht. I erreicht sein Maximum für $z = r_1$. Bezeichnet man diesen Wert mit so wird

$$\mathfrak{S} = \frac{p_1 r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{r_2^3}{r_1^3}\right)$$

oder

$$(413)\quad \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{8\mathfrak{S} + 4p_1}{8\mathfrak{S} - 5p_1}}.$$

Während diese Gleichung für $m = 4$ gilt, findet man allgemein

$$(414)\quad \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{2m\mathfrak{S} + 2(m-2)p_1}{2m\mathfrak{S} - (m-1)p_1}}.$$

In gleicher Weise wie für inneren Druck lässt sich auch für äuss Druck der Festigkeitszustand ermitteln, doch liegt hierfür kaum ein p tisches Bedürfnis vor.

Zu betonen ist, dass sich vorstehende Untersuchungen nicht weiteres auf Kugelteile, z. B. Halbkugeln anwenden lassen, weil hier geometrischen Bedingungen, welche die Gleichungen (399) ausdrücken. welche darauf beruhen, dass der Keilwinkel des Elements Fig. 65 elastischer Deformation einer vollständigen Hohlkugel unverändert bl nicht erfüllt zu sein brauchen.

Die Schubspannungen im geraden Stab infolge biegender Kräfte.

§ 111. Bezeichnen wir, wie in § 46, mit T_z die nach Z gerichtete Schnittk komponente in dem Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten ger Stabes, dessen Schwerpunktsachse die X-Achse ist, so ist nach Gleichung (

$$\int \tau_{xz}\, dF = T_z.$$

Während für den Fall der reinen Biegung (§ 52) $T_z = 0$ ist, was bei dünnen Stäben auch in andern Fällen näherungsweise gesetzt werden darf, ist bei kurzen oder relativ dicken Stäben diese Vereinfachung nicht allgemein zulässig.

T_z oder $\int \tau_{xz} dF$ ist bei statisch bestimmten Aufgaben als Resultante aller auf einer Seite des Querschnitts wirkenden biegenden Kräfte gegeben und kann z. B. aus Gleichung (150) (y mit z vertauscht) berechnet werden. Zur Ermittelung von τ_{xz} selbst genügt aber diese Gleichung nicht.

Die naheliegende Annahme, es sei τ_{xz} überall im Querschnitt gleich gross, also $\tau_{xz} = \frac{T_z}{F}$, ist unzulässig, denn sie verträgt sich nicht mit dem in § 32 behandelten Oberflächenzustand. Ist der Querschnitt zur XZ-Ebene symmetrisch, so wird in den in dieser Ebene liegenden Punkten der Oberfläche $\tau_{xz} = 0$. Ist der Querschnitt auch zur XY-Ebene symmetrisch, so muss eine Funktion, welche τ_{xz} durch die Querschnittskoordinaten ausdrückt, aus ähnlichen Erwägungen wie den in § 76 angestellten, für symmetrische Punkte gleiche Werte für τ_{xz} ergeben.

Die Schubspannungen im rechteckigen Querschnitt.

Für den rechteckigen Querschnitt würde diese Bedingung z. B. durch die hypothetische Gleichung

(415) $$\tau_{xz} = \tau_0 - m z^2$$

in einfachster Weise erfüllt, in welcher τ_0 die Schubspannung in der neutralen Linie, m einen unbekannten konstanten Faktor bedeutet.

Setzt man (415) in Gleichung (131) ein, so erhält man, wenn $2b$ die Breite, $2c$ die Höhe des Rechtecks ist, mit $dF = 2b\,dz$,

(416) $$2b \int_{z=-c}^{z=c} (\tau_0 - m z^2)\, dz = T_z ,$$

integriert also

(417) $$4bc\left(\tau_0 - m\frac{c^2}{3}\right) = T_z .$$

Für $z = c$ oder $z = -c$ wird $\tau_{xz} = 0$, also nach (415)

$$m = \frac{\tau_0}{c^2} .$$

Da ferner $4\,bc = F$ ist, so folgt nach (417)

$$\text{Max}\,\tau_{xz} = \tau_0 = \frac{3}{2}\frac{T_z}{F}, \tag{418}$$

sowie allgemein nach (415)

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{T_z}{F}. \tag{419}$$

Hiermit zeigt sich, dass unter den gemachten Annahmen die grösste Schubspannung in halber Höhe des Querschnitts stattfindet, und dass sie $^3/_2$ mal so gross ist wie bei gleichmässiger Verteilung über den ganzen Querschnitt.

Nachdem τ_{xz} durch Gleichung (419) als Funktion von z gegeben ist, σ_x aber aus Gleichung (173) ebenfalls für jedes z (η mit z, H mit J zu vertauschen) berechnet werden kann, so besteht die Möglichkeit nach (43) die Hauptspannungen für jedes z zu ermitteln. Da jedoch τ_{xz} für die neutrale Linie, σ_x für die Randpunkte, den grössten Wert annimmt, so genügt es meist, diese Werte zu berechnen.

Auf die Festigkeitsgefahr hat τ_0 mitunter bei Holzbalken einen entscheidenden Einfluss, weil hier der Fall Fig. 10 eintritt, in welchem die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 um 45^0 gegen die Faserrichtung geneigt sind, also die geringe Spaltfestigkeit des Holzes stark in Anspruch genommen wird.

Die Schubspannungen in beliebigen einfach symmetrischen Querschnitten.

§ 113. Ist schon beim rechteckigen Querschnitt die hypothetische Gleichung (415), nach welcher die Schubspannungen berechnet wurden, nur ein einfacher Behelf ohne Anspruch auf strenge Richtigkeit, so beruht bei anders geformten Randlinien die übliche Berechnung der Schubspannungen auf Hypothesen von noch geringerer Zuverlässigkeit. Von einer allgemeinen Behandlung dieser Aufgabe, wie sie z. B. Grashof durchgeführt hat, kann hier um so eher abgesehen werden, als ein wesentlicher Einfluss der Schubspannung auf die Festigkeitsgefahr erst bei so kurzen Stäben stattfindet, dass die Bezeichnung „Stab" kaum noch am Platze ist.[1]) Es mag daher

1) S. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit S. 132.

genügen, unter Bezug auf Fig. 66 den Gedankengang der Untersuchungen Grashofs anzudeuten.

Ist der Stab frei von achsialen Kräften, so ist die Resultante der Zugspannungen, welche auf der einen Seite der neutralen Linie herrschen,

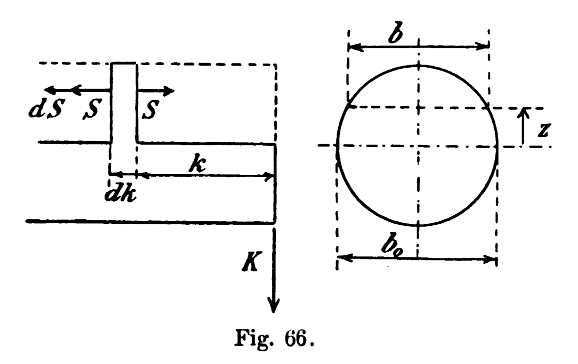


Fig. 66.

benso gross wie die Summe der Druckspannungen auf der anderen Seite. Nach der Bernoullischen Hypothese (§ 50) ist $\sigma_x = \frac{z}{a} \sigma_a$. Die Randpannung σ_a ist aber für die biegende Kraft K und den Krafthebelarm k ach (162)

$$\text{(420)} \qquad \sigma_a = \frac{a}{J} M = \frac{K}{J} a k .$$

Bezeichnet hier S die Schnittkraft des halben Stabquerschnittes, o ist

$$\text{(421)} \qquad S = \int \sigma_x \mathrm{d}F = \frac{\sigma_a}{a} \int_0^a z \, \mathrm{d}F .$$

Mit der Abkürzung

$$\text{(422)} \qquad \int_0^a z \, \mathrm{d}F = \mathfrak{M}_0$$

r das statische Moment des halben Querschnitts, bezogen auf die neutrale inie, erhält man aus (420) und (421)

$$\text{(423)} \qquad S = K \frac{\mathfrak{M}_0}{J} k .$$

In einem Nachbarquerschnitt ist die entsprechende Schnittkraft

$$\text{(424)} \qquad S + \mathrm{d}S = K \frac{\mathfrak{M}_0}{J} (k + \mathrm{d}k) .$$

Die Differenz dS sucht das zwischen den Schnitten liegende Element auf der neutralen Ebene zu verschieben. Die Anhaftfläche ist hier $b_0 dk$. Bezeichnet sonach τ_0 die mittlere Schubspannung τ_{zx} in derselben, so wird Gleichgewicht nach X bestehen, wenn

$$b_0 \tau_0 dk = K \frac{\mathfrak{M}_0}{J} dk$$

ist, oder, wenn in der neutralen Ebene die mittlere Schubspannung

$$\tau_0 = \frac{K}{b_0} \frac{\mathfrak{M}_0}{J} \tag{425}$$

stattfindet.

In entsprechender Weise findet man für eine Ebene im Abstand z von der neutralen Ebene (s. Fig. 66) die mittlere Schubspannung τ_{zx}, die hier abgekürzt mit τ bezeichnet werde, durch die Gleichung

$$\tau = \frac{K}{b} \frac{\mathfrak{M}}{J}, \tag{426}$$

unter $\mathfrak{M}$ das statische Moment des der Strecke $a-z$ entsprechenden Querschnittsteiles, verstanden, welches durch die Gleichung

$$\int_z^a z\, dF = \mathfrak{M} \tag{427}$$

definiert wird.

Aus (425) und (426) folgt

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{b_0}{b} \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}, \tag{428}$$

aus (420) und (425)

$$\frac{\tau_0}{\sigma_a} = \frac{\mathfrak{M}_0}{a b_0 k}. \tag{429}$$

Während beim rechteckigen und auch beim kreisförmigen Querschnitt τ_0 den grössten im Querschnitt vorkommenden Wert von τ_{zx}, also auch von τ_{zx} darstellt, kann nach (428) dieses Maximum ausserhalb der neutralen Linie des Querschnitts liegen. Das ist z. B. der Fall bei einem über Eck belasteten Quadrat; solche Fälle sind jedoch Ausnahmen. Umso wichtiger ist daher Gleichung (429), aus welcher man leicht erkennen kann, ob die (in der Regel grösste) Schubspannung τ_0 im Vergleich mit σ_a eine beachtenswerte Grösse hat.

Für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b wird z. B.

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{a^2 b_0}{2}, \quad \text{also} \quad \frac{\tau_0}{\sigma_a} = \frac{1}{2} \frac{a^2 b_0}{a b_0 k} = \frac{a}{2k}.$$

Wäre der Stab so lang wie hoch, d. h. $k = 2a$, so erhielte man hiernach $\tau_0 = \frac{\sigma_a}{4}$. Bei rechteckigem Querschnitt erreicht daher τ_0 eine beachtenswerte Grösse erst für so kurze Stäbe, dass die Bernoullische Hypothese und damit die Grundlage der ganzen Rechnung dann nur noch als rohe Näherung gelten darf.

Für Walzeisenträger wird wegen des dünnen Steges b_0 relativ klein. Hier ist daher mitunter bei kurzen Trägern auf τ_0 Rücksicht zu nehmen.

Die Spannungen τ_0 und τ wurden als Mittelwerte der τ_{xx} oder $\tau_{x\mathfrak{z}}$ in den Linien b_0 oder b des Querschnitts bezeichnet. Während beim Rechteck mit hinreichender Wahrscheinlichkeit anzunehmen ist, dass die Schubspannungen in allen Punkten einer Breitenlinie b untereinander gleich sind, ist eine Verschiedenheit umso wahrscheinlicher, je grösser der Winkel φ ist, welchen die Umfangstangente in den Endpunkten von b mit der Z-Achse einschliesst. Wenn, wie üblich, für den Randwert von $\tau_{x\mathfrak{z}}$ der Mittelwert τ nach Gleichung (426) gesetzt wird, so liegt hierin eine vereinfachende Annahme, welche mitunter ziemlich unrichtig sein kann, deren Ergebnisse daher mit Vorsicht zu benutzen sind. Da in den Randpunkten des Querschnitts die Gesamtschubspannung τ_x nach § 32 und § 33 die Richtung der Umfangstangente haben muss, so erhält man unter der eben erwähnten Annahme nach (426)

$$\tau_x = \frac{\tau}{\cos\varphi} = \frac{K}{b\cos\varphi}\frac{\mathfrak{M}}{J} \tag{430}$$

als grösste in der Linie b vorkommende Schubspannung.

Im Innern des Querschnitts müssen die Schubspannungen normal zu den Netzlinien gerichtet sein, welche in Fig. 21 mit III bezeichnet sind. Um solche Schubspannungen zu veranlassen, müsste aber eine ebenso gerichtete gegenseitige Verschiebung der Elemente benachbarter Querschnitte stattfinden, welche von Punkt zu Punkt verschieden und daher nicht möglich ist, ohne dass die Querschnitte sich krümmen oder deformieren, d. h. in ihrem Verhalten von der Bernoullischen Hypothese abweichen. Eine strengere, aber für praktische Zwecke wohl zu umständliche Biegungstheorie müsste versuchen, diesen Widerspruch zu vermeiden.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen hat sich ergeben, dass die grösste in einem Querschnitt vorkommende Schubspannung Max τ grösser

ist als der bei gleichförmiger Verteilung sich ergebende Wert $\frac{K}{F}$. Bezeichnet man das Verhältnis beider mit t, setzt also

$$\frac{\operatorname{Max} \tau}{K} F = t,$$

so ist t ein von der Gestalt des Querschnitts abhängiger Faktor, z. B. für das Rechteck $t = 3/2$ nach (418), für den Kreis $t = 4/3$. Für solche Querschnitte, für die $\operatorname{Max} \tau = \tau_0$ ist, erhält man nach (425)

$$t = \frac{F}{b_0} \frac{\mathfrak{M}_0}{J}. \tag{431}$$

Fände keine Krümmung der Querschnitte statt, so wäre t derselbe Faktor, welcher in den Gleichungen (254) und (255) vorkommt. In Wirklichkeit wird jener Wert meist etwas kleiner sein als nach (431).

Zu beachten ist, dass in den Gleichungen (425) und (426) nicht das biegende Moment selbst vorkommt, sondern nur die Kraft K. Die Gleichungen gelten daher auch für solche Punkte eines Stabes, in denen $\mathrm{M} = 0$, also auch $B = 0$ ist, und die man infolgedessen **Inflexionspunkte** nennt. Weil hier $\sigma_x = 0$ ist, kann man den in einem solchen Querschnitt stattfindenden Spannungszustand **reine Schubspannung** nennen. Für denselben wird nach (43) $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$, $\sigma_3 = 0$ und nach (104) $E\varepsilon = \frac{m+1}{m} \tau$.

Wenn dieser Zustand durch scherenartige Wirkung hervorgerufen wird, so ist die Voraussetzung, dass in unmittelbarer Nähe des betrachteten Querschnitts keine Mantelkräfte wirken, nicht erfüllt. Da auf diesen Fall die Gleichungen (425) und (426) keine Anwendung haben, so ist z. B. die genauere Untersuchung der Festigkeit einer Nietverbindung ein sehr verwickeltes Problem, dessen strenge Lösung bis jetzt noch nicht erfolgt ist.

Biegung eines einfach gekrümmten dicken Stabes in einer Ebene durch ein Kräftepaar.

§ 114. Die bei schwacher Krümmung näherungsweise zulässige Annahme, dass die durch die Reihenfolge der Schwerpunkte definierte Zentrallinie bei reiner Biegung ihre Länge nicht ändert, wird mit zunehmender Krümmung immer ungenauer.

Ist der Quadrant Fig. 67 mit einem Endquerschnitt befestigt, am anderen Endquerschnitt durch ein rechtsdrehendes Kräftepaar von dem biegenden Moment M belastet, so wird ein beliebiges durch zwei Radialebenen begrenztes keilförmiges Element vom Keilwinkel $\mathrm{d}\alpha$ in ein solches vom Keilwinkel $\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta$ übergeführt, wenn die Querschnitte Ebenen bleiben. Unter dieser Annahme, welche strengeren Ansprüchen hier noch weniger gerecht wird als bei geraden Stäben, findet sich für die neutrale Achse ein bestimmter Abstand r_0 von der Krümmungsmittellinie.[1]) Infolge der Drehung des beweglichen Querschnitts um die neutrale Achse, welche hinfort Nullachse genannt werden möge, beschreibt der Endpunkt eines Faserelementes $r\mathrm{d}\alpha$ den kleinen Weg $(r - r_0)\mathrm{d}\beta$. Die Dehnung dieser Faser ist sonach

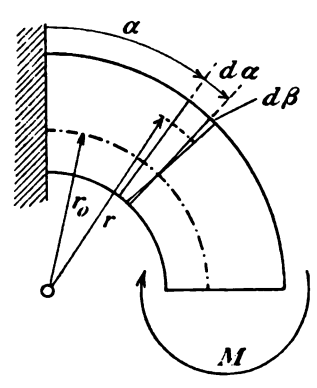


Fig. 67.

(432) $$\varepsilon = \frac{r - r_0}{r} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha},$$

und die zum Querschnitt normale Spannung, falls der Spannungszustand als einachsig aufgefasst wird, nach dem Hookeschen Gesetz

(433) $$\sigma = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) E \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Offenbar muss, wenn keine Einzelkraft wirkt, die Gleichung

$$\int \sigma \mathrm{d}F = 0$$

oder

(434) $$E\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\left(F - r_0 \int \frac{\mathrm{d}F}{r}\right) = 0$$

erfüllt, sonach, mit der Abkürzung $\int \frac{\mathrm{d}F}{r} = R$,

1) Die Bezugsgrösse r_0 hat R. Bredt eingeführt (s. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1895 S. 1054). Durch ihre Benutzung vereinfacht sich die Rechnung insofern, als die Drehung nur vom biegenden Moment, die Dehnung nur von der Zugkraft abhängig erscheint. Die Resultate stimmen mit denen Grashofs genau überein, wie auch Bredt hervorhebt.

$$r_0 = \frac{F}{R} \tag{435}$$

sein.

Die Funktion R möge das **Divisionsmoment** des Querschnitts inbezug auf die Krümmungsachse heissen, sofern es die Summe aller Flächenelemente dividiert mit ihrem Abstande von der Krümmungsachse darstellt.

Der Biegungswinkel $d\beta$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\int \sigma r \, dF = M, \tag{436}$$

welche, mit Substitution für σ aus (433), lautet

$$E \frac{d\beta}{d\alpha} \left(\int r \, dF - r_0 F \right) = M. \tag{437}$$

Dabei ist $\int r \, dF$ das statische Moment des Querschnitts inbezug auf die Krümmungsachse, für welches $F r_s$ gesetzt werden kann, unter r_s den Schwerpunktsradius verstanden. Man erhält sonach

$$E \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{M}{(r_s - r_0) F} \tag{438}$$

und weiter, nach Gleichung (433),

$$\sigma = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{M}{Fe}, \tag{439}$$

wenn e die Exzentrizität $r_s - r_0$, d. h. den Abstand zwischen Nullachse und Schwerachse bedeutet.

Wirkung einer Einzelkraft auf das elastische Element.

§ 115. Die Nullachse hat die Eigenschaft, dass eine zu dem elastischen Element normal gerichtete Einzelkraft P, welche die Nullachse schneidet, den Winkel $d\alpha$ nicht verändert, also $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ ergibt.

Um dies zu beweisen, werde der zunächst unbekannte Abstand der Kraft P vom Krümmungsmittelpunkt mit x bezeichnet, der konstante Betrag aber, um welchen sich unter dem Einfluss von P alle Faserelemente $r\,d\alpha$, also auch $r_0\,d\alpha$, verlängern, mit $d\lambda$. Hiernach erhält man

$$\varepsilon = \frac{d\lambda}{r\,d\alpha}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{d\lambda}{r_0\,d\alpha}, \qquad \text{also} \qquad \varepsilon = \frac{r_0}{r}\varepsilon_0$$

und unter Anwendung des Hookeschen Gesetzes auch

(440) $$\sigma = \frac{r_0}{r} \sigma_0 .$$

Führt man diese Beziehung in die Gleichung $\int \sigma \, \mathrm{d}F = P$ ein, so erhält man

(441) $$P = r_0 \sigma_0 \int \frac{\mathrm{d}F}{r} \quad \text{oder} \quad P = r_0 \sigma_0 R ,$$

während bei Einführung in die Momentengleichung $\int \sigma r \, \mathrm{d}F = Px$

(442) $$Px = r_0 \sigma_0 F ,$$

$$\text{also} \quad x = \frac{r_0 \sigma_0 F}{P} = \frac{r_0 \sigma_0 F}{r_0 \sigma_0 R} \quad \text{und}$$

nach (435)

(443) $$x = r_0$$

folgt, wodurch obige Behauptung bewiesen ist.

Ersetzt man in Gleichung (442) x durch r_0, so wird

(444) $$\sigma_0 = \frac{P}{F} ,$$

d. h. die Spannung in der Nullachse ist so gross, als wäre in dem Querschnitt überall gleiche Spannung. Tatsächlich ist dies nicht der Fall, vielmehr folgt aus (440) und (444)

(445) $$\sigma = \frac{r_0}{r} \frac{P}{F} .$$

Gleichzeitige Wirkung eines Kräftepaares und einer Einzelkraft.

§ 116. Da sich innerhalb der Giltigkeitsgrenzen des Hookeschen Gesetzes die durch mehrere Kräfte hervorgebrachten Spannungen aus den Einzelspannungen summieren, so entsteht durch M und P, wenn P in der Nullachse angreift, für ein Element im Abstand r vom Krümmungsmittelpunkt nach (439) und (445) die Gesamtspannung

(446) $$\sigma = \frac{r_0}{r} \frac{P}{F} + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{M}{Fe} .$$

Die Dehnung in der Nullfaser ist, unabhängig von M,

(447) $$\varepsilon = \frac{P}{EF} ,$$

die Beugung (s. § 53) bezogen auf die Längeneinheit der Nullfaser nach (438), unabhängig von P,

$$B = \frac{d\beta}{d s_0} = \frac{M}{r_0 c F E}. \tag{448}$$

Eine im Schwerpunkt angreifende Kraft P kann durch eine ihr gleiche in der Nullachse und ein Kräftepaar $M = Pe$ ersetzt werden. Sie ergibt die überall gleiche Spannung $\sigma = \frac{P}{F}$, wie beim geraden Stab, nicht aber $B = 0$, sondern $B = \frac{P}{r_0 F E}$.

Mit den Ausdrücken für ε_0 und B ist die Berechnung der elastischen Wirkungen eines dicken gekrümmten Stabes auf das für dünne Stäbe angegebene Verfahren im V. Abschnitt zurückgeführt; nur tritt hier die Nullfaser an die Stelle der Zentrallinie. Hiermit ist auch für dünne krumme Stäbe der Weg für die Lösung statisch unbestimmter Aufgaben vorgezeichnet.

Das Divisionsmoment $R = \int \frac{dF}{r}$.

§ 117. Die Berechnung der Funktion R durch Integralrechnung ist schon für Kurven, die sich durch eine Gleichung leicht ausdrücken lassen, umständ-

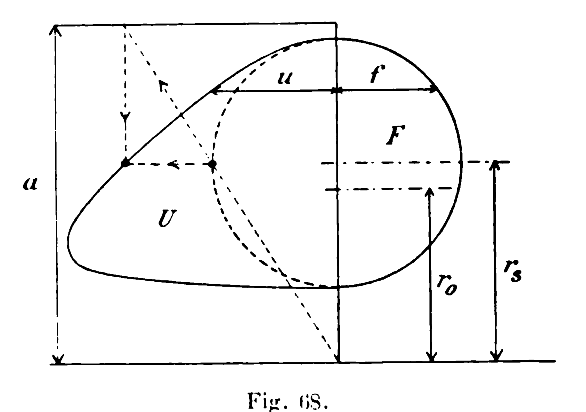


Fig. 68.

lich. Einfach und in allen Fällen anwendbar ist hingegen ein von Bredt angegebenes graphisches Verfahren, welches in Fig. 68 für einen halben Kreisquerschnitt dargestellt ist.

Bedeutet a eine beliebige als Einheit dienende Strecke, so ist auch

49) $$aR = a\int\frac{\mathrm{d}F}{r} = \int\frac{a}{r}\,\mathrm{d}F\,.$$

ir den Halbkreis, Fig. 68, ist aber $\mathrm{d}F = f\mathrm{d}r$, also

50) $$aR = \int\frac{a}{r}\,f\mathrm{d}r\,,$$

51) oder, wenn $\frac{a}{r}f = u$ gesetzt wird,

52) $$aR = \int u\mathrm{d}r\,.$$

Berechnet man u für eine hinreichende Anzahl von Kreispunkten oder mittelt es durch die in Fig. 68 angedeutete Konstruktion mittels ähn- :her Dreiecke, so kann man punktweise die Kurve u/r darstellen, deren ächeninhalt $U = \int u\mathrm{d}r$ ist. Planimetriert man die Fläche, so erhält an U, damit das Divisionsmoment

53) $$R = \frac{U}{a}\,,$$

wie nach Gleichung (434) auch den Nullradius

154) $$r_0 = \frac{F}{U}\,a\,.$$

Die Kurve u/r hat noch einige bemerkenswerte Eigenschaften. Ändert ıan die willkürlich angenommene Strecke a, so sind die entsprechenden $/r$-Kurven untereinander affin. Ihre horizontale Schwerachse ist, wie sich icht zeigen lässt, die Nullachse.

Für $a = r_0$, eine offenbar auch mögliche Annahme, wird nach (454) $U = F$. Bezeichnet man das Trägheitsmoment dieser Fläche inbezug auf ie Nullachse mit J_0, so ist

$$J_0 = \int r^2\mathrm{d}U - Fr_0{}^2 = \int r^2 u\mathrm{d}r - Fr_0{}^2 = \int r^2\frac{r_0}{r}f\mathrm{d}r - Fr_0{}^2$$
$$= r_0\int rf\mathrm{d}r - Fr_0{}^2 = r_0\int r\mathrm{d}F - Fr_0{}^2 = r_0 F r_s - Fr_0{}^2$$

so, da $r_s - r_0 = e$,

55) $$J_0 = r_0 e F\,.$$

Führt man J_0 in die Gleichungen (446) und (448) ein, so erhält an

56) $$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{J_0}(r - r_0)\,, \qquad B = \frac{M}{J_0 E}\,.$$

Für den geraden Stab wird der Nullpunkt zum Schwerpunkt. D geht J_0 über in das Trägheitsmoment J der Fläche F bezogen auf d Schwerachse, r_0 in r_s, und $r - r_0$ erhält die Bedeutung von η in § Man erhält mithin aus (456) die für **den geraden Stab bereits früher fundenen Gleichungen**

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{J}\eta, \qquad B = \frac{M}{JE},$$

deren näherungsweise Anwendung **für dünne Stäbe in § 65 hiermit n träglich** gerechtfertigt erscheint.

Die Belastung eines rotierenden Hohlzylinders durch d Zentrifugalkraft.[1])

§ 118. Die Netzgleichung **für ein elastisches Element unterscheidet** sich von Gleichung (381) nur insofern, als φ_z **nicht Null, sondern für** Winkelgeschwindigkeit ω

$$\varphi_z = -\omega^2 z$$

ist. Man erhält daher nach (99)

$$(457)\qquad \frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z}(\sigma_y - \sigma_z) - \gamma\frac{\omega^2}{g}z\,.$$

Ferner gelten völlig unverändert die **Gleichungen (379) und** (380)

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{mE}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{d^2\zeta}{dz^2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\right],$$

so dass sich aus diesen und (457) die zu (382) **analoge Gleichung**

$$(458)\qquad d\left(\frac{\zeta}{z}\right) + d\left(\frac{d\zeta}{dz}\right) + \frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)E}\gamma\frac{\omega^2}{g}z\,dz = 0$$

ergibt, aus welcher nach der Abkürzung

$$(459)\qquad \frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)E}\gamma\frac{\omega^2}{g} = N$$

durch eine erste Integration folgt:

1) Grossmann, Über den Ersatz der **Schwungräder durch rotier Scheiben und die Spannungen in denselben. Verhandlungen des Vereins** Beförderung des Gewerbfleisses 1883 S. 216.

Grübler, **Der Spannungszustand in Schleifsteinen und Schmirgelschei Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1897 S. 860.**

$$\frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} + \frac{N}{2} z^2 + C_1 = 0 \,. \tag{460}$$

Weiter erhält man durch Multiplikation mit $z\,dz$

$$d(z\zeta) + \frac{N}{2} z^3 dz + C_1 z\,dz = 0\,,$$

und, nach einer zweiten Integration,

$$z\zeta + \frac{N}{8} z^4 + \frac{C_1}{2} z^2 + C_2 = 0\,. \tag{461}$$

Hiernach ergeben sich analog zu (386) die Dehnungen

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_x &= e - (\varepsilon_y + \varepsilon_z) = e - \left(\frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}\right) = e + \frac{N}{2} z^2 + C_1\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{\zeta}{z} = -\frac{N}{8} z^2 - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{z^2}\,, \\ \varepsilon_z &= \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{3}{8} N z^2 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{z^2}\,, \end{aligned}\right. \tag{462}$$

mittels deren sich aus den Poissonschen Gleichungen (379) für die drei Hauptspannungen die Ausdrücke ableiten:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m}{m+1} E\left(\frac{N}{2} z^2 + C_1 + \frac{m-1}{m-2} e\right), \\ \sigma_y &= \frac{m}{m+1} E\left(-\frac{N}{8} z^2 - \frac{C_1}{2} + \frac{1}{m-2} e - \frac{C_2}{z^2}\right), \\ \sigma_z &= \frac{m}{m+1} E\left(-\frac{3}{8} N z^2 - \frac{C_1}{2} + \frac{1}{m-2} e + \frac{C_2}{z^2}\right), \end{aligned}\right. \tag{463}$$

in denen e unbekannt und nicht für alle Teile des Zylinders konstant ist.

Sind die Stirnflächen frei, so ist daselbst überall $\sigma_x = 0$, und, da die Netzlinien für σ_x mit der Achse parallel sind, so folgt nach den Cauchyschen Gleichungen $\frac{d\sigma_x}{dx} = 0$, wonach auch im Innern des Materials überall σ_x Null ist. Aus der ersten der Gleichungen (463) folgt dann

$$e = -\frac{m-2}{m-1}\left(\frac{N}{2} z^2 + C_1\right), \tag{464}$$

und damit erhält man aus (463) für σ_y und σ_z

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{m}{m^2-1} E\left(\frac{m+3}{8} N z^2 + \frac{m+1}{2} C_1 + (m-1)\frac{C_2}{z^2}\right). \\ \sigma_z &= -\frac{m}{m^2-1} E\left(\frac{3m+1}{8} N z^2 + \frac{m+1}{2} C_1 - (m-1)\frac{C_2}{z^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{465}$$

Rotierender Hohlzylinder ohne Oberflächendruck.

§ 119. **Ist die innere und die äussere Zylinderfläche druckfrei,** so ist $z = r_1$ **und für** $z = r_2$ **die Spannung** $\sigma_x = 0$, **und hiernach** ergeben **zur Bestimmung der Integrationskonstanten** C_1 **und** C_2 **die Gleichung**

$$(466)\quad \begin{cases} \frac{3m+1}{8} N r_1^2 + \frac{m+1}{2} C_1 - (m-1)\frac{C_2}{r_1^2} = 0\,, \\ \frac{3m+1}{8} N r_2^2 + \frac{m+1}{2} C_1 - (m-1)\frac{C_2}{r_2^2} = 0\,, \end{cases}$$

aus denen folgt

$$(467)\quad \begin{cases} C_1 = -\frac{3m+1}{4(m+1)} N(r_1^2 + r_2^2)\,, \\ C_2 = -\frac{3m+1}{8(m-1)} N r_1^2 r_2^2\,. \end{cases}$$

Hiermit erhält man aus (465) und (459)

$$(468)\quad \sigma_y = \frac{m-2}{(m-1)^2}\left[(3m+1)\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{z^2}\right) - (m+3)z^2\right]\frac{\gamma}{\ldots}$$

und es zeigt sich, dass der grösste **Wert von** σ_y **derjenige ist, für** w z am kleinsten ist, nämlich $z = r_1$. **Derselbe findet sich zu**

$$(469)\qquad \operatorname{Max}\sigma_y = \frac{m-2}{m-1}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{3m+1}{m-1}\right)\frac{\gamma\omega^2}{4g} r_2^2\,,$$

während man für $z = r_2$ erhält

$$(470)\qquad \operatorname{Min}\sigma_y = \frac{m-2}{m-1}\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \frac{3m+1}{m-1}\right)\frac{\gamma\omega^2}{4g} r_1^2\,.$$

Für z. B. $m = 4$ wird

$$\operatorname{Max}\sigma_y = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{13}{3}\right)\frac{\gamma\omega^2}{g} r_2^2\,.$$

Nachdem die **Hauptspannungen überall bekannt sind, können** hi analog wie beim **ruhenden Zylinder,** die **Zerrungen** berechnet werde

denen $E\varepsilon_y$ die für die Festigkeit massgebende ist. Für die Innenfläche ist, da $\sigma_x = 0$ und $\sigma_z = 0$, der Spannungszustand einachsig; sonach wird daselbst $E\varepsilon_y = \text{Max}\, \sigma_y$, kann also nach (469) berechnet werden. Von weiterer Verfolgung der Aufgabe kann an dieser Stelle abgesehen werden.[1])

Die Oberflächenfestigkeit.

§ 120. Bei den stab- und wandförmigen Körpern sind die durch Berührung mit anderen Körpern entstehenden Spannungen an der Berührungsstelle für die Festigkeitsgefahr belanglos, und bei ersteren sind, wie sich gezeigt hat, die gefährlichsten Punkte von diesen Stellen oft sehr weit entfernt. Man pflegt daher den Zustand an den Berührungsstellen bei sperrigen Körpern überhaupt nicht näher zu untersuchen, sondern den sehr verwickelten Vorgang der Berührung durch eine mathematische Abstraktion, die konzentrierte Kraft (§ 46), zu ersetzen.

Bei gedrungenen Körpern ist es nicht immer möglich, dem schwierigen Berührungsproblem auszuweichen. Überall, wo Maschinenteile, sei es unter ruhendem Druck, sei es unter rollender oder gleitender Bewegung, aufeinander wirken, tritt es dem Ingenieur entgegen und führt zu Betrachtungen, welche im Grunde auch in das Gebiet der Festigkeitslehre gehören. Aber auch hier hat sich die Praxis des Maschinenbaues seither im allgemeinen damit begnügt, die Erfahrungen des Spezialversuchs für verwandte Aufgaben zu verwerten, ohne die allgemeine, vom Körperelement ausgehende Theorie zu benutzen.

So sind es nur die mit den zylindrischen oder ebenen Gleitflächen der Zapfen gemachten Erfahrungen, nach denen man den zulässigen Normaldruck derselben beziffert. Ebenso richtet sich der Druck von Rollen, z. B. von Eisenbahnrädern nach den mit diesen gewonnenen Erfahrungen, und Ähnliches gilt für die gleitende Berührung der gekrümmten Flächen bei Zahnrädern und Hebedaumen.

Mehrfach ist jedoch der Versuch gemacht worden, auch diese Aufgaben mit den Gesetzen des elastischen Elements in Zusammenhang zu bringen; und nach wertvollen Vorarbeiten von Grashof und Winkler ist es dem

1) Während die Zentrifugalbelastung zylindrischer Körper insbesondere bei schnell rotierenden Schleifsteinen in Frage kommt, hat die Dampfturbine das Problem gestellt, eine rotierende Scheibe so von der Achse zum Rande hin zu verjüngen, dass die in den Gleichungen (465) auftretende Spannungsabnahme verschwindet oder vermindert wird. Hierüber s. Stodola, Die Dampfturbinen, Berlin 1904. S. 132.

berühmten Physiker H. Hertz[1]) gelungen, unter Benutzung von Funktionen der Potentialtheorie den Spannungszustand an der Berührungsstelle zweier Körper von beliebig gekrümmten Oberflächen allgemein auszudrücken. Hiermit ergab sich zugleich ein Verfahren zu einer wissenschaftlich befriedigenden Verknüpfung des Begriffes der Härte mit der Festigkeitslehre. Bei dieser Arbeit, von deren vollständiger Wiedergabe hier abgesehen werden muss, ist das Hookesche Gesetz zu Grunde gelegt; auch ist angenommen, dass das Material an der Oberfläche sich ebenso verhält wie im Innern eines Körpers. Hertz erklärte seine Theorie als der Prüfung durch das Experiment sehr bedürftig, da er selbst nur wenige Versuche und zwar mit Glas angestellt hat. Striebeck[2]) hat sehr sorgfältige Versuche mit Stahlkugeln angestellt, welche für diese die Hertzsche Theorie bestätigen.

Sind r_1 und r_2 die Radien der sich berührenden Kugeln, und ist $a = r_1 + r_2$ der Mittelpunktsabstand bei Punktberührung, so berechnet sich nach Hertz für den Berührungsdruck P die Verminderung von a zu

$$-\Delta a = 1{,}23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}, \tag{471}$$

der Durchmesser d der entstehenden kreisförmigen Druckfläche wird

$$d = 2{,}22 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \tag{472}$$

die grösste im Mittelpunkt der Druckfläche entstehende Druckspannung

$$-\sigma_0 = 0{,}388 \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2} = 1{,}5 \frac{4P}{\pi d^2}. \tag{473}$$

Die in diesen Gleichungen vorkommende Summe $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ ist bekanntlich die sogenannte relative Krümmung der beiden Flächen.

Um die Gleichungen auf die Berührung zwischen einer Vollkugel r_1 und einer Hohlkugel r_2 anzuwenden, ist der Krümmungsradius der letzteren als negativ einzuführen.

1) Dr. H. Hertz, Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses 1882. S. 449.

2) Striebeck, Kugellager für beliebige Belastungen. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1901 S. 73. Wenn Striebeck im Verlauf dieser Versuche die zulässige Spannung viel höher findet als die Elastizitätsgrenze für einachsige Zugspannung, so erklärt sich dies durch den Zustand dreiachsiger Druckspannung, welcher an der Berührungsstelle herrscht, im Hinblick auf § 125.

Während es sich bei dem Hertzschen Problem um ruhenden Druck andelt und wenigstens für $r_1 = r_2$ die Hertzsche Annahme gerechtertigt erscheint, dass in den Berührungsflächen keine Schubspannungen ierrschen, die Flächen selbst also Netzflächen sind, muss diese Annahme iberall fallen, wo Gleiten stattfindet. Ist $\mathfrak{R}$ der Koeffizient der gleitenden Reibung, so ist diese Schubspannung

$$474)\qquad \tau = \mathfrak{R}(-\sigma),$$

unter $(-\sigma)$ den Berührungsnormaldruck verstanden. Findet kein Gleiten statt, so ist τ unbekannt zwischen den Grenzen

$$475)\qquad 0 < \tau < \mathfrak{R}(-\sigma).$$

Die Aufgabe ist dann statisch unbestimmt.

Bei Anwendung von Schmiermitteln ist $\mathfrak{R}$ so klein, dass τ für die Festigkeitsgefahr belanglos bleibt. Wesentlich ist jedoch die Wärmeentwicklung, welche, falls sie gross wird, die Festigkeit in unzulässiger Weise herabsetzen kann und zwar sowohl durch Wärmespannungen wie durch Veränderung des Elastizitätsmoduls und der Elastizitätsgrenze des Materials.

IX. Abschnitt.

Der Modellversuch und seine Verwertung.

Anwendung des Kickschen Gesetzes.

§ 121. Werden zwei Körper aus gleichem Material und von geometrisch ähnlichen Formen, Kräften von ähnlicher Lage und Richtung unterworfen, so werden nach einem von Kick[1]) aufgestellten Gesetz ähnliche Deformationen hervorgebracht, wenn sich die Kräfte verhalten wie die Quadrate des linearen Verhältnisses. Werden die beiden Körper mit I und II, zwei homologe Längen mit l_1 und l_2, zwei homologe Kräfte mit P_1 und P_2 bezeichnet, so wird, mit der Abkürzung $l_2 : l_1 = \lambda$, nach der Voraussetzung:

$$P_2 : P_1 = \lambda^2. \tag{476}$$

Die geometrische Ähnlichkeit der Veränderungen bedingt die Gleichung

$$\Delta l_2 : \Delta l_1 = l_2 : l_1 .$$

Für Längen-Elemente ist also

$$\frac{\Delta \mathrm{d} l_2}{\mathrm{d} l_2} = \frac{\Delta \mathrm{d} l_1}{\mathrm{d} l_1}, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1$$

und, wenn das Hookesche Gesetz gilt, auch

$$\sigma_2 = \sigma_1 .$$

Kräfte, welche der Gleichung (476) genügen, werden sonach auch gleiche Spannungszustände und gleiche Festigkeitsgefahr hervorrufen. Als Beispiel für Gleichung (476) kann der Druck zwischen zwei Kugelpaaren von je gleichem Radienverhältnis dienen, Hat das eine Paar die Radien r_1 und R_1, das andere die Radien $r_2 = \lambda r_1$, $R_2 = \lambda R_1$, so erhält man aus Gleichung (473) $P_2 : P_1 = \lambda^2$, d. i. Gleichung (476).

1) Kick, Das Gesetz der proportionalen Widerstände, Leipzig 1885.

Wendet man das Kicksche Gesetz auf Gefässe an, so ergeben sich die der Gleichung (476) genügenden Kräfte bei gleichem spezifischen Druck p auf die Wandfläche. Demnach haben geometrisch ähnliche Gefässe bei gleichem Druck gleiche Bruchgefahr.

Für belastete Stäbe gilt das Kicksche Gesetz nur insoweit, als deren Eigengewicht dabei nicht in Betracht kommt.

Berücksichtigung der Schwere beim Modellversuch.

§ 1

Spielt bei den Belastungskräften eines Körpers die Schwere eine wesentliche Rolle, so entsteht für die Erfüllung der Gleichung (476) beim Modellversuch eine Schwierigkeit, denn offenbar ist das Verhältnis der Gewichte ähnlicher Körper nicht λ^2, sondern λ^3.

Für die Körper I und II würde man daher gleiche Spannung in homologen Punkten erhalten, wenn G_2 nicht $\lambda^3 G_1$ sondern $\lambda^2 G_1$ wäre. Bei dem wirklichen Gewicht $\lambda^3 G_1$ wird daher im Giltigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes die Spannung σ_2 aus der Gleichung

$$\sigma_2 : \sigma_1 = \lambda^3 G_1 : \lambda^2 G_1$$

hervorgehen als

$$\sigma_2 = \lambda \sigma_1 , \tag{477}$$

in Worten: Bei geometrisch ähnlichen und ähnlich belasteten Körpern verhalten sich die aus dem Gewicht hervorgehenden Spannungen wie homologe Längen.

Um in diesem Falle vom Modellversuch auf das Verhalten im Grossen schliessen zu können, muss im Modell das Gewicht G_1 durch eine diesem möglichst gleichartig wirkende Zusatzkraft Q so vermehrt werden, dass die Gleichung

$$(G_1 + Q) : G_2 = 1 : \lambda^2$$

erfüllt wird. Aus der Beziehung $G_2 = \lambda^3 G_1$ ergibt sich dann

$$Q = (\lambda - 1) G_1 . \tag{478}$$

Der Sinn dieser Gleichung ist für einfache Fälle unmittelbar einleuchtend.

Damit z. B. ein Seil von der Länge 1000 m durch sein Eigengewicht nicht zerrissen wird, muss ein geometrisch ähnliches Modell von 1 m Länge ausser seinem Gewicht noch das (1000—1) fache desselben als Zusatzbelastung tragen können.

Damit ein Balken von 10 m Länge durch sein Eigengewicht nicht mehr als den 500ten Teil seiner Länge gebogen wird, darf sein Modell von 1 m sich nicht mehr als 2 mm biegen, wenn das Gewicht G_1 durch die gleichförmig verteilte Zusatzkraft $Q = (10-1)\, G_1$ vermehrt wird.

Unter der bei dünnen Stäben zulässigen Vereinfachung kann in dem letzten Falle der Modellversuch auch in der Weise durchgeführt werden, dass für die Querschnitte ein Linienverhältnis φ gewählt wird, welches von demjenigen λ für die Stablängen verschieden ist. Setzt man z. B. für zwei am einen Ende befestigte durch ihr Eigengewicht belastete Stäbe I und II die Maximalspannungen einander gleich, so wird

$$\sigma = \frac{\gamma}{2} \frac{F_1}{W_1} l_1{}^2 = \frac{\gamma}{2} \frac{\varphi^2 F_1}{\varphi^3 W_1} \lambda^2 l_1 ,$$

also

$$\lambda = \sqrt{\varphi} . \tag{479}$$

Zwei Rundeisenstäbe von 1 und 4 cm Dicke erfahren also gleiche Spannung infolge ihrer Schwere, wenn die Längen sich verhalten wie 1 : 2. Die Biegungspfeile werden dann einander gleich; z. B. für den Endpunkt des Stabes II erhält man nach (203)

$$y_2 = \frac{G_2}{EJ_2} \frac{l_2{}^3}{8} = \frac{\gamma}{8E} \frac{F_2}{J_2} l_2{}^4 = \frac{\gamma}{8E} \frac{\varphi^2 F_1}{\varphi^4 J_1} \lambda^4 l_1{}^4 ,$$

also nach Gleichung (479)

$$y_2 = y_1 .$$

Diese Beziehungen sind besonders wichtig für die Vorausberechnung krummer Stäbe von komplizierter Form nach Modellversuch.

In solchen Fällen, in denen sowohl die Schwere wie konzentrierte Kräfte zu berücksichtigen sind, wird sich meist die Anwendung der Zusatzkräfte empfehlen.

X. Abschnitt.

Beurteilung der Festigkeitsgefahr.

Die Anstrengung des Materials.

§ 123.

Während in den Abschnitten I und II gezeigt wurde, dass der geometrische Zustand eines deformierten Körperelements durch die drei Hauptdehnungen ε_1, ε_2, ε_3 und der Spannungszustand durch die drei Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 vollständig bestimmt ist, ergab sich im Abschnitt III, Gleichung (106), dass die Hauptdehnungen und die Hauptspannungen sich gegenseitig in der Weise bedingen, dass je drei der sechs Grössen zu ihrer Bestimmung genügen.

Ähnliches würde sich auch finden, wenn statt des Hookeschen Gesetzes etwa eine der Gleichungen (116) und (117) benutzt würde, immer noch eine vollkommen elastische Formänderung vorausgesetzt.

Wie in § 1 schon bemerkt, ist aber das elastische Verhalten jedes festen Körpers an Grenzen gebunden, bei deren Überschreiten bleibende Formänderungen eintreten. Diese Grenzen, welche ebenfalls sowohl durch Deformation wie durch Spannung ausgedrückt werden können, mit Sicherheit zu vermeiden, ist der Zweck der meisten Festigkeitsrechnungen im Bau- und Maschinenwesen. Zu dieser Aufgabe sind die Ergebnisse der Abschnitte I bis IX Beiträge.

Was sie lehren, kann man die absolute Anstrengung des Materials nennen. Um aber beurteilen zu könnnen, ob die gefundene Anstrengung gefährlich ist, muss man wissen, bei welcher Art und Grösse der Anstrengung für das Material des Körpers die Grenze des elastischen Verhaltens erreicht oder überschritten wird, um nach der absoluten auch die relative Anstrengung beurteilen zu können.

Bei einachsiger Spannung gibt hierüber der Dehnungs- oder Zugversuch mit einem prismatischen Stab Auskunft. Die Elastizitätsgrenze kann hier sowohl durch σ_e wie durch ε_e angegeben werden, unter

σ die Spannung an der **Elastizitätsgrenze**,
ε_e die Dehnung „ „ „

verstanden, beide Grössen auf die Stabachse, die zugleich Hauptspannungsachse ist, bezogen.

Ist eine dieser Zahlen bekannt, und sind σ_1 und ε_1 die für eine bestimmte Aufgabe berechneten Maximalwerte, so muss sein

$$\sigma_1 < \sigma_e\,, \qquad \varepsilon_1 < \varepsilon_e\,,$$

damit keine Gefahr eintritt, und es ist hier gleichgiltig, ob die eine oder die andere Gleichung benutzt wird. Je kleiner die echten Brüche

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_e}\,, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_e}$$

sind, um so grösser wird die Sicherheit gegenüber der Elastizitätsgrenze sein. Man kann daher ihre reziproken Werte als **Sicherheitsgrade** bezeichnen.

Für die Grösse der im Einzelfalle zweckmässigen Anstrengung sind spezielle Erfahrungen massgebend, und zwar pflegt man diejenigen Zahlenwerte für σ_1 als **zulässige** zu bezeichnen, bei denen die wahrscheinliche Anstrengung von der Elastizitätsgrenze hinreichend weit entfernt bleibt, um selbst bei den ungünstigsten noch in Frage kommenden Möglichkeiten eine Gefährdung der Festigkeit auszuschliessen. Die früher übliche Anwendung sogenannter Sicherheitskoeffizienten ist mehr und mehr ausser Gebrauch gekommen, da es doch nicht möglich ist, für verschiedene Substanzen, Körperformen und Belastungsweisen die gleichen Sicherheitskoeffizienten zu benutzen.

Die Wöhlerschen Versuche.

§ 124. Die Erfahrung hat gelehrt, dass bei gleicher Anstrengung eines Maschinenteils bleibende Deformation oder Bruch um so leichter eintritt, je **verschiedener** die Festigkeitszustände sind, zwischen denen ein periodischer Wechsel stattfindet, und je häufiger dieser Wechsel erfolgt.

Die ersten wissenschaftlichen Untersuchungen über diese Frage hat **Wöhler**[1]) im Auftrag des preussischen Handelsministeriums gemacht, indem

1) **Wöhler**, Über Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl, Berlin 1870 bei Ernst u. Korn.

r eine Anzahl Stäbe teils ruhenden, teils periodisch wiederholten Belastungen ussetzte, welche unter der Elastizitätsgrenze blieben. Er fand die leinste Bruchgefahr bei ruhender Belastung, eine mittlere bei inseitigem Wechsel der Belastung inbezug auf den spannungslosen ustand, die grösste bei symmetrischem Belastungswechsel, d. h. Vechsel zwischen $+\sigma_1$ und $-\sigma_1$. Zur Bezeichnung dieser verschiedenen elastungsarten haben sich neuerdings einige Ausdrücke eingeführt, die hier u erwähnen sind.

Launhardt nennt Tragfestigkeit diejenige einachsige Zugspannung, elche ein Körper, z. B. ein Stab, bei ruhender Dauerbelastung eben noch tragen kann, Ursprungsfestigkeit die grösste bei einseitigem Spannungs-echsel zwischen Null und entweder einem positiven oder einem negativen renzwert noch mögliche Spannung.

Weyrauch hat noch den Ausdruck Schwingungsfestigkeit hinzu-fügt zur Bezeichnung der grössten Spannung, welche beim Wechsel rischen einem positiven und einem gleich grossen negativen Wert noch tragen wird.

Für gleiches Material besteht für die drei Festigkeiten das ungefähre ihlenverhältnis 3 : 2 : 1, aus welchem man ein ähnliches Verhältnis für e zulässige Anstrengung abgeleitet hat. Dasselbe findet auch durch un-ittelbare Erfahrungen des Maschinenbaues eine gewisse Bestätigung.

Die Festigkeitsgefahr bei mehrachsigem Spannungszustand.

Noch wesentlich schwieriger und weniger wissenschaftlich geklärt liegt e Frage nach der Grenze des elastischen Verhaltens bei mehrachsigen annungszuständen. Man hat auf verschiedene Weise versucht, die Elasti-tätsgrenze bei mehrachsiger Spannung mit den für die einachsige Spannung ltenden Zahlen σ_e und ε_e in Verbindung zu bringen. Während einige orscher annahmen, dass bei mehrachsiger Spannung die Elastizitätsgrenze nn eintreten würde, wenn die grösste Hauptspannung den Wert σ_e der achsigen Spannung erreicht, nahmen andere an, dass hierzu die Gleich-it der grössten Hauptdehnung[1]) mit ε_e erforderlich sei, und wieder § 125.

1) Ist ε_1 die grösste Hauptdehnung, so ist $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_e} = \frac{E\varepsilon_1}{E\varepsilon_e} = \frac{E\varepsilon_1}{\sigma_e}$. $E\varepsilon_1$ drückt, schon S. 114 erwähnt wurde, beim mehrachsigen Spannungszustand keine uptspannung aus, sondern nur ein Vielfaches der Dehnung, eine Zahl jedoch, lche nicht wie ε_1 ein sehr kleiner Bruch ist, sondern etwa eine solche Grösse oder haben darf, wie die üblichen Spannungen. Hierdurch erklärt sich der

andere glaubten mit der Gleichsetzung der Hauptschubspannungen das Richtige zu treffen, oder was nach Gleichung (88) auf dasselbe hinauskommt, indem sie bei mehrachsiger Spannung die grösste algebraische Differenz der Hauptspannungen gleich σ_e oder die grösste Differenz der Hauptdehnung gleich ε_e setzen.[1])

In Anbetracht der Unsicherheit, welche hier noch herrscht, ist bei der Übertragung von experimentellen Erfahrungen von einem Spannungszustand auf einen andern umso mehr Vorsicht geboten, je verschiedener die Körperformen und die Festigkeitszustände in den gefährlichen Punkten sind. Das der mathematischen Theorie der Festigkeitslehre vorschwebende Ziel, die Sicherheit der elastischen Stabilität bei einem beliebigen Spannungszustand nach wenigen experimentell gefundenen Tatsachen vorausberechnen zu können, ist also noch keineswegs erreicht.

Der Sicherheitsgrad.

§ 126. Wenn man sich erinnert, dass der Zustand in den gefährlichsten Elementen eines Körpers immer nur auf Grund von Deformations- oder Spannungshypothesen von keineswegs strenger Richtigkeit mathematisch ausgedrückt werden kann, wenn man ferner bedenkt, dass auch die mechanischen Bedingungen, denen ein Körper, mit dessen Gestaltung man sich beschäftigt, etwa ein Maschinenteil, beim Gebrauch unterworfen wird, nur näherungsweise vorausberechnet werden können, wenn man endlich beachtet, dass jedes Material mit unbekannten Fehlern behaftet ist, so kann es nicht überraschen, dass bei der Berechnung von Bau- und Maschinenteilen eine zwei- bis fünffache Sicherheit inbezug auf die Elastizitätsgrenze in Ansatz gebracht werden muss.

Über die Wahl des rechnungsmässigen Sicherheitsgrades kann im allgemeinen noch folgendes gesagt werden.

Eine möglichst hohe Sicherheit ist immer dann zu empfehlen, wenn der hieraus folgende grössere Materialaufwand keine zu grossen Nachteile, z. B. zu grosses Gewicht, zu grossen Raumbedarf, zu hohen Preis mit sich bringt.

Gebrauch, $E\varepsilon_1$ als Ersatzspannung zu bezeichnen (wofür in § 86 Zerrung vorgeschlagen wurde) und nach ihr die Anstrengung beim mehrachsigen Spannungszustand zu beurteilen, wie beim einachsigen nach der Hauptspannung.

1) Eine kritische Betrachtung dieser Frage, die neuerdings durch O. Mohr, Voigt, Guest, Duguet u. a. wertvolle Anregungen empfangen haben, enthält die Dissertation von Dr. Ing. Paul Roth über „Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues“, Berlin 1902.

Ist man genötigt, zur Vermeidung derartiger Nachteile den Sicherheitsgrad niedrig zu wählen, so ist umso grössere Vorsicht erforderlich, je mehr im Falle eines Bruches auf dem Spiele steht. Man kann jedoch um so weiter herabgehen, d. h. um so leichter konstruieren, je vollständiger der Einblick ist, den die Rechnung gewährt, und je genauer man das Material kennt. In letzterem Sinne sehr wichtig sind die Materialprüfungen, die in neuerer Zeit insbesondere für grössere Lieferungen in Gebrauch gekommen sind, und welche sogar so weit gehen können, dass der fertige Bau- oder Maschinenteil selbst einer Probebelastung unterworfen wird.

Der Berechnung schwer zugänglich sind von den Belastungen insbesondere die dynamischen und die statisch unbestimmten. Zu den letzteren gehören auch die aus Temperaturwechseln hervorgehenden Kräfte. Dieser Schwierigkeit kann man oft nicht einmal durch reichlichen Materialaufwand aus dem Wege gehen, da hierdurch die dynamischen oder die statisch unbestimmten Kräfte erst recht vergrössert werden können. Es bleibt daher nichts übrig, als die Schwierigkeiten der Rechnung zu überwinden, wenn man nicht auf die Vorteile des schnellen Ganges und der statisch unbestimmten Konstruktionen verzichten will.

In vielen Fällen ist für die Dimensionierung nicht der elementare Festigkeitszustand, sondern eine Grenze für die Formänderung des ganzen Körpers massgebend, eine Bedingung, die von Anfängern oft übersehen wird.

Nicht selten bleiben auch Kräfte unbemerkt, denen der Körper nicht erst bei seinem normalen Gebrauch, sondern schon während der Bearbeitung ausgesetzt wird, und durch welche der scheinbar „richtig berechnete“ Konstruktionsteil verdorben wird, ehe er vollendet ist.

Auch Materialspannungen, welche schon von der Herstellung herrühren, z. B. Gussspannungen, können das Resultat der Rechnung unangenehm stören.

Die weitere Verfolgung dieser Fagen führt über die Grenzen der allgemeinen Festigkeitslehre hinaus, insbesondere in das Gebiet der Maschinenlehre und in die verschiedenen Zweige des Bauwesens, woselbst an bestimmteren Objekten die aufgesammelten Erfahrungen zu Regeln für die praktische Formgebung verdichtet worden sind.[1]) In einzelnen Zweigen des Bau-

---

1) In besonders erschöpfender Weise behandelt C. v. Bach diese Fragen in seinem bekannten Werk: „Die Maschinenelemente“ unter Verwertung seiner zahlreichen Versuche auf dem Gebiete der Materialprüfung.

wesens, wo die öffentliche Sicherheit es verlangt, haben solche Regeln sogar Gesetzeskraft erlangt[1]), die sich zum Teil auf die Qualitätsprüfung der Baumaterialien erstrecken.

Festigkeitszahlen.

§ 127. Wie in § 1 bemerkt wurde, hat es die Festigkeitslehre vorzugsweise mit elastischen Formänderungen zu tun, und in der Tat sind alle in diesem Buche angestellten Untersuchungen auf dieses Gebiet beschränkt geblieben. Die meisten gelten sogar nur bis zur Grenze der Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung, welche bei manchen Stoffen, besonders bei Gusseisen und bei Steinen, wesentlich niedriger liegt als die Elastizitätsgrenze. Zur Beurteilung eines Stoffes als Baumaterial ist aber das Verhalten jenseits der Elastizitätsgrenze dennoch wichtig, insbesondere bei grosser relativer Anstrengung; gibt es doch zahlreiche Fälle in der Technik, bei denen kleine bleibende Formänderungen ohne Nachteil stattfinden dürfen, während ein Bruch unter allen Umständen vermieden werden muss. Hierin ist es begründet, dass die Festigkeitsprüfungen gewöhnlich bis zum Bruch geführt werden und dass die grösste Belastung (Zug oder Druck), bezogen auf die Einheit des ursprünglichen Querschnittes, welche der Versuchskörper ausgehalten hat, als seine Zug- oder Druckfestigkeit bezeichnet wird.

Aus dem grossen Zahlenvorrat, welcher durch Festigkeitsversuche angesammelt worden ist, können hier nur einige besonders wichtige Werte hervorgehoben werden.

Sie sollen zunächst als Grundlage für die Berechnung von Übungsaufgaben dienen, können aber auch für solche Fälle benutzt werden, in denen die Herkunft des Materials nicht bekannt ist, sonach bestimmtere Zahlen fehlen.

Die spezifischen Gewichte wurden beigefügt, um das Eigengewicht oder andere Massenwirkungen, z. B. die Zentrifugalkraft berechnen zu können.

Es bedeutet:

γ in kg/l das spezifische Gewicht,
σ_e „ kg/qcm die elastische Grenzspannung für Zug,
σ „ „ „ „ (grösste) Zugfestigkeit,
$(-\sigma_g)$ „ „ „ „ (grösste) Druckfestigkeit für Würfel,
E „ „ „ den Elastizitätsmodul.

---

1) Eine sehr übersichtliche Zusammenstellung der Vorschriften preussischer Ministerien und der Berliner Baupolizei enthält das kürzlich erschienene Werkchen: „Statische Tabellen, Belastungsangaben und Formeln zur Aufstellung von Berechnungen für Baukonstruktionen“ von F. Boerner. Berlin 1804.

Schweisseisen:	$\gamma =$	7,8
	$E =$	2 000 000
	$\sigma_e =$	1500
	$\sigma_g =$	3400 bis 3800 nach der Walzrichtung
	$\sigma_g =$	2800 bis 3000 „ „ Querrichtung.
Flusseisen:	$\gamma =$	7,85
	$E =$	2 100 000
	$\sigma_e =$	2000
	$\sigma_g =$	3400 bis 4500.
Flussstahl:	$\gamma =$	7,86
	$E =$	2 200 000
	$\sigma_e =$	2500
	$\sigma_g =$	4500 bis 9000 für Walzstahl
	$\sigma_g =$	12 000 „ 16 000 „ Draht.
Gusseisen:	$\gamma =$	7,25
	$E =$	800 000 bis 1 000 000
	$\sigma_e =$	500 „ 1000, unsicher
	$\sigma_g =$	1200 „ 1800 für bearbeitete Stäbe von Maschinenguss
	$\sigma_g =$	600 „ 1200 für unbearbeitete Stäbe von Maschinenguss
	$\sigma_g =$	„ 2300 für besondere Zwecke.
Stahlguss:	$\gamma =$	7,86 (selten blasenfrei)
	$E =$	2 100 000
	$\sigma_e =$	2200
	$\sigma_g =$	3500 bis 7000.
Kupfer:	$\gamma =$	8,9 bis 9
	$E =$	1 200 000
	$\sigma_e =$	500 bis 800
	$\sigma_g =$	2000 „ 2200.
Holz (Bauholz).	$\gamma =$	0,45 bis 0,55
	$E =$	60 000 „ 120 000
	$\sigma_e = \sigma_g =$	250 „ 1000 für Faserrichtung
	$(-\sigma_g) =$	200 „ 250 „ „ .
Sandstein:	$\gamma =$	2,2 bis 2,5
	E	68 000 „ 100 000 für Druck
	$(\sigma_g$	250 „ 1800.

Ziegelsteine:	$\gamma =$	1,5 bis 1,7
	$E =$	28 000 im mittel für Druck
	$(-\sigma_g) =$	100 bis 300.
Zement-Beton:	$\gamma =$	1,80 bis 2,45
	$E =$	250 000 im mittel für Druck
	$(-\sigma_g) =$	60 bis 200.

Sämtliche Zahlen beziehen sich auf mittlere Lufttemperatur. Für Stahl und Eisen ändert sich die Festigkeit bis 400 ° C nur wenig, darüber hinaus jedoch nimmt sie für je 100 ° um etwa 30 % ab. Bei Kupfer hingegen nimmt die Festigkeit schon von 50 ° an stetig ab und zwar bis 400 ° um mehr als 50 %. Ähnliches Verhalten zeigen auch die Kupferlegierungen.

ANWENDUNGEN

DER

FESTIGKEITSLEHRE.

BEISPIELE UND ÜBUNGSAUFGABEN.

Erste Aufgabengruppe.

Vorübungen über geometrische Integrale. Momente ersten und zweiten Grades von Linien und Flächen.

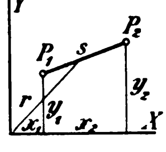


Fig. 69.

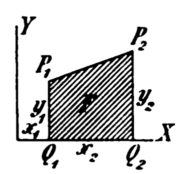


Fig. 70.

1. Für die Strecke $P_1P_2 = s$ (Figg. 69 und 70) sind die Koordinaten $x_1 = 8$ cm, $x_2 = 30$ cm, $y_1 = 16$ cm, $y_2 = 24$ cm gegeben.

Was bedeuten die Linienintegrale $\int ds$, $\int x ds$, $\int y ds$, $\int r ds$, $\int x^2 ds$, $\int y^2 ds$, $\int r^2 ds$, $\int xy ds$ für die ganze Strecke s? Die Integrale sind auszudrücken:

a) durch die Buchstaben x_1, x_2, y_1, y_2,

b) in Zahlen mit Hinzufügung der Dimension.

2. Was bedeuten für Fig. 70 die Flächenintegrale $\int\int dx dy$, $\int\int x dx dy$, $\int\int y dx dy$, $\int\int r dx dy$, $\int\int x^2 dx dy$, $\int\int y^2 dx dy$, $\int\int r^2 dx dy$, $\int\int xy dx dy$, ausgedehnt über die Fläche $P_1P_2Q_2Q_1 = F$? Die Integrale sind auszudrücken:

a) durch x_1, x_2, y_1, y_2,

b) durch Zahlen mit Hinzufügung der Dimension.

3. Warum ist

$$\int r^2 ds = \int x^2 ds + \int y^2 ds$$

sowie

$$\int\int r^2 dx dy = \int\int x^2 dx dy + \int\int y^2 dx dy \,?$$

4. Wie lauten die Definitionsgleichungen für die Schwerpunkts-Koordinaten x_0, y_0 der Fläche F (Fig. 70)?

5. Wie gross in Zahlen sind die Schwerpunktskoordinaten x_0, y_0 der Fläche F in Fig. 70?

6. Wenn zur Abkürzung $dx dy = dF$ gesetzt wird, was bedeutet x_i und y_i in den folgenden Gleichungen:

$$\int x^2 dF = F x_i^2\,, \qquad \int y^2 dF = F y_i^2\,,$$

und welche Zahlenwerte erhalten x_i und y_i nach Fig. 70?

7. Wie ändern (vereinfachen) sich die Ausdrücke für die Linienintegrale (Aufg. 1), wenn nach Fig. 71 $x_2 = x_1$ und $y_2 = 0$ ist? Wie gross werden in diesem Falle die Flächenintegrale (Aufg. 2)?

Fig. 71.

8. Welchen Wert hat $\int xy\,ds$ für den in Fig. 72 dargestellten Sonderfall der Aufg. 1 $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$? (Symmetrie inbezug auf X).

Fig. 72.

9. Welchen Wert hat $\int xy\,ds$ für den in Fig. 73 dargestellten Sonderfall der Aufg. 1 $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$? (Symmetrie inbezug auf Z).

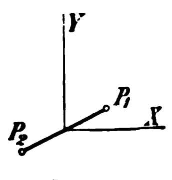


Fig. 73.

10. Für den Streckenzug $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ (Fig. 74) sind die Schwerpunkts-Koordinaten x_0, y_0 a) durch Rechnung, b) durch Zeichnung zu ermitteln. Z. B. sei

$$\begin{array}{ll} x_1 = -11 & y_1 = 23 \\ x_2 = 0 & y_2 = 33 \\ x_3 = 18 & y_3 = 35 \\ x_4 = 29 & y_4 = 20 \\ x_5 = 51 & y_5 = 14\,. \end{array}$$

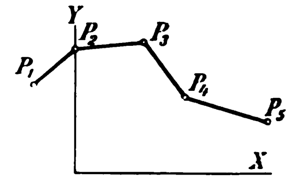


Fig. 74.

11. Für die Fläche $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ (Fig. 75) sind die Schwerpunkts-Koordinaten x_0, y_0 a) durch Rechnung, b) durch Zeichnung zu ermitteln. Z. B. sei (abweichend von Fig. 75)

$$\begin{array}{ll} x_1 = -15 & y_1 = 6 \\ x_2 = 7 & y_2 = 33 \\ x_3 = 26 & y_3 = 17 \\ x_4 = 62 & y_4 = 10 \\ x_5 = 7 & y_5 = -12\,. \end{array}$$

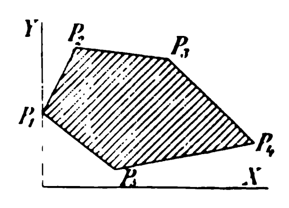


Fig. 75.

12. Ermittle für Rechteck und Dreieck (Figg. 76 und 77) die Trägheitsmomente bezogen auf die X-Achse sowie das Zentrifugalmoment bezogen auf X und Y.

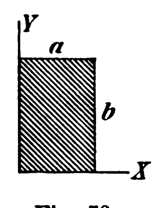


Fig. 76.

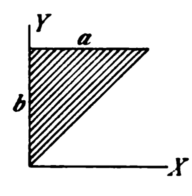


Fig. 77.

13. Ermittle für die Flächen des Kreises und der Ellipse (Figg. 78 und 79) die Trägheitsmomente bezogen auf die X-Achse.

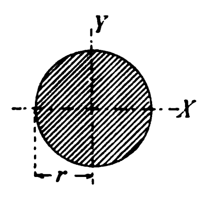


Fig. 78.

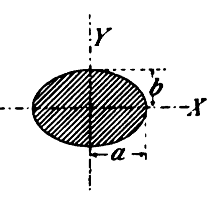


Fig. 79.

14. Wenn $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{M}_y$ die statischen Momente einer Kurve AB oder einer Fläche inbezug auf die Achsen X und Y sind, welche Ausdrücke ergeben sich für die Momente $\mathfrak{M}_u$ und $\mathfrak{M}_v$ in den Fällen Figg. 80, 81, 82?

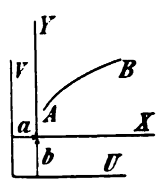


Fig. 80.

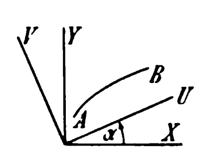


Fig. 81.

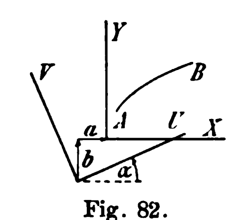


Fig. 82.

15. Wenn J_x und J_y die Trägheitsmomente einer Kurve AB oder einer Fläche für die Achsen X und Y sind, während C_{xy} das Zentrifugalmoment bedeutet, welche Ausdrücke ergeben sich für J_u, J_v und C_{uv} in den Fällen Figg. 80, 81, 82?

16. Welche Vereinfachung ergibt sich in den Transformationsgleichungen der Aufgaben 14 und 15, wenn die Achsen X, Y durch den Schwerpunkt der gegebenen Kurven oder Flächen gehen?

17. Was versteht man unter den Trägheitshauptachsen einer ebenen Kurve oder Fläche? Wie gross ist C_{xy} für die Hauptachsen? Warum ist eine Symmetrieachse zugleich Hauptachse, während doch die Hauptachsen nicht Symmetrieachsen zu sein brauchen?

18. Wie gross ist das statische Moment einer Linie oder einer Fläche inbezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse?

19. Inbezug auf welche von sämtlichen parallelen Achsen ist das Trägheitsmoment einer Linie oder Fläche ein Minimum?

20. Vergleiche die Trägheitsmomente des Dreiecks (Fig. 83) inbezug auf die parallelen Achsen I, II, III, von denen III durch den Schwerpunkt geht.

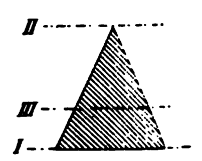


Fig. 83.

21. Berechne das Trägheitsmoment des Trapezes (Fig. 84) inbezug auf die horizontale Schwerachse.

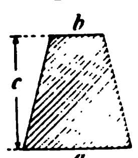


Fig. 84.

22. Berechne das Trägheitsmoment des Halbkreises (Fig. 85) inbezug auf die horizontale Schwerachse.

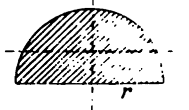


Fig. 85.

23. Berechne das Trägheitsmoment des Quadrats Fig. 86 inbezug auf die Achsen I und II. Welche besondere Form nimmt die Trägheitsellipse für das Quadrat an? In welchem Falle ergibt sich dieselbe Form für andere Querschnitte?

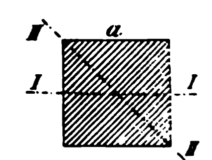


Fig. 86.

24. Das Trägheitsmoment einer zusammengesetzten Figur ist die Summe der Trägheitsmomente ihrer Teile, vorausgesetzt dass die Teile und das Ganz

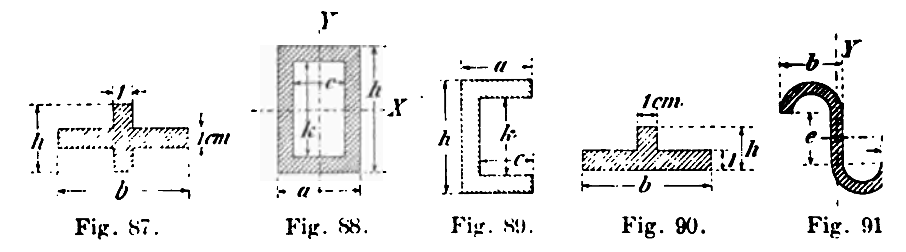


Fig. 87. Fig. 88. Fig. 89. Fig. 90. Fig. 91

auf dieselbe Achse bezogen sind. Hiernach berechne man die Trägheitmomente der Flächen Figg. 87 bis 91 inbezug auf die horizontale Schwerachs

25. Man ermittle die Trägheitshauptachsen und die Hauptträgheitsmomente für die Querschnitte Figg. 92 und 93.

26. Man zeichne zu den Querschnitten Figg. 92 und 93 die Zentralellipsen, d. h. die Trägheitsellipsen inbezug auf den Schwerpunkt.

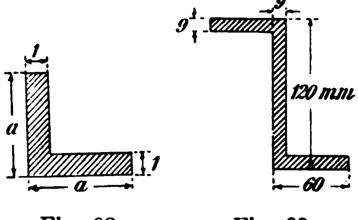


Fig. 92. Fig. 93.

27. Man zeichne zu den Querschnitten Figg. 92 und 93 je ein Polardiagramm, indem man nach der Gleichung $J = \mathrm{F}(\alpha)$ auf der Bezugsachse, welche mit einer der Hauptachsen den veränderlichen Winkel α einschliesst, die Grösse des dieser Achse entsprechenden Trägheitsmomentes nach geeignetem Massstab als Radiusvektor aufträgt.

Hierbei kann J, wie in Aufg. 15, berechnet oder nach der Transformationsformel konstruiert werden.

28. Welche Vorteile und welche Nachteile hat die Darstellung des Trägheitsmoments mittels der Zentralellipse im Vergleich mit dem Polardiagramm $J = \mathrm{F}(\alpha)$ (Aufg. 27)?

29. Für welche Verhältnisse $\frac{h}{y_0}$ in Fig. 94 ist der Fehler, den man begeht, wenn man das Trägheitsmoment J_x durch bhy_0^2 annähert, kleiner als $0{,}1\,J_x$ oder als $0{,}01\,J_x$?

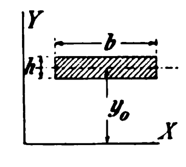


Fig. 94.

30. Ermittle für den Viertelkreis AE (Fig. 95) die Schwerpunktskoordinaten x_0, y_0 sowie die Trägheitsmomente J_x und J_y unter Verwendung von Polarkoordinaten.

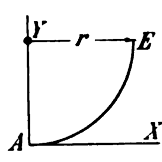


Fig. 95.

31. Ermittle für die Flächen AEG und AEH (Fig. 96) die Momente ersten und zweiten Grades einschliesslich des Zentrifugalmoments inbezug auf die Achsen X und Y.

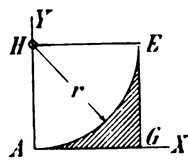


Fig. 96.

32. Ermittle für die Linie AB und für die Fläche ABC (Fig. 97) die Momente zweiten Grades inbezug auf die Achsen X, Y, Z, von denen Z auf der XY-Ebene senkrecht steht.

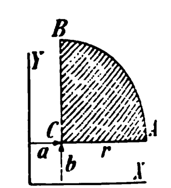


Fig. 97.

33. Zeichne zu der Kurve AE (Fig. 98) die Integralkurve $Y = \frac{1}{a}\int_0^x y\,dx$, ausgehend von A_1, wie angedeutet, stelle die Fläche AEE_1A_1 unter Benutzung dieser Kurve dar und teile sie mit deren Hilfe durch eine senkrechte Gerade in 2 Teile von gleichem Inhalt.

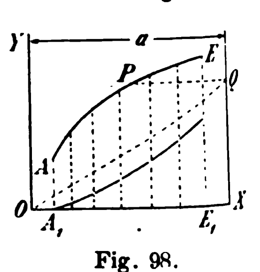


Fig. 98.

34. Zu der Kurve AE (Fig. 99) ist eine abgeleitete Kurve mit den Ordinaten u zu zeichnen, deren Ordinatenfläche $\int u\,dx$ das statische Moment der Kurve AE inbezug auf die X-Achse, d. h. $\int y\,ds$ darstellt.

Anleitung: $\int y\,ds = \int \frac{y}{\cos\tau}\,dx$. Setze $\frac{y}{\cos\tau} = u$ und konstruiere nach Fig. 99 zu jedem Punkte C der gegebenen Kurve einen Punkt D. D ist ein Punkt der gesuchten Kurve.

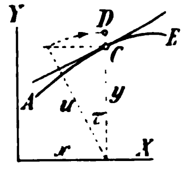


Fig. 99.

35. Zu der Kurve AE (Fig. 100) ist eine abgeleitete Kurve y/v zu zeichnen, deren Fläche $\int v\,dy$ das statische Moment der Fläche AEE_0A_0 inbezug auf die X-Achse, d. h. $\int xy\,dy$, darstellt.

Anleitung: Setze $\int xy\,dy = a\int v\,dy$ also $v = \frac{xy}{a}$, und konstruiere v, wie in Fig. 100 angegeben, mittels ähnlicher Dreiecke.

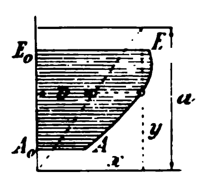


Fig. 100

36. Suche ein zu Aufg. 34 analoges graphisches Verfahren zur Darstellung des Trägheitsmoments einer Kurve.

Anleitung: $\int y^2 ds = \int \frac{y^2}{\cos\tau}\,dx$. Setze $\frac{y^2}{\cos\tau} = t$ u. s. w.

uerschnitt Fig. 101 ist auf graphischem Wege
punkt zu suchen, sodann ist das Trägheitsmo-
ug auf die horizontale Schwerachse nach dem
ı Verfahren (Taschenbuch Hütte) zu ermitteln,
ıd die beiden Widerstandsmomente für diese
erechnen.

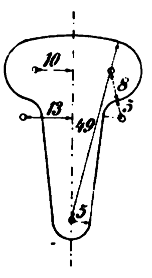


Fig. 101.

erschnitt der badischen
:hiene (1891) (Fig. 102)
ıfg. 33 der Flächenin-
Aufg. 35 das statische
:zogen auf die Basis,
:er Schwerpunkt, weiter
tsmoment für die hori-
werachse nach Nehls
'iderstandsmoment für
d für Sohle, endlich
tsmoment für die Sym-
zu bestimmen.

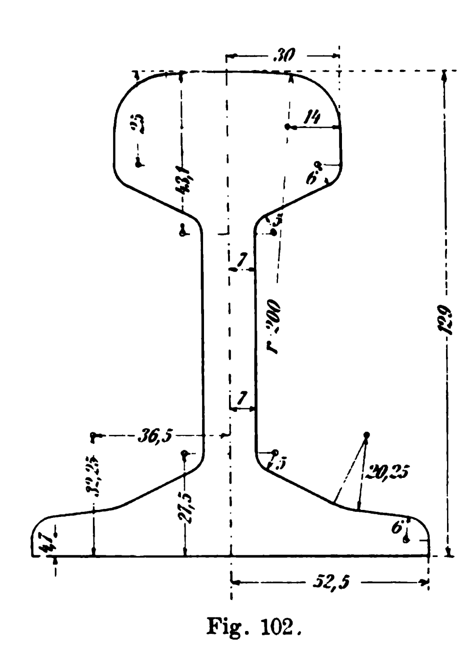


Fig. 102.

ı „Kern" zu den Querschnitten Figg. 76, 78, 89, 92, 93, 107.

tung: Zu jedem Randpunkte P gibt es eine Kernlinie, welche
Schnittpunkte mit den Hauptachsen bestimmt werden kann.
d y die Koordinaten von P inbezug auf die Hauptachsen, k_x
Abstände der Schnittpunkte der Kernlinie mit den Hauptachsen
rom Schwerpunkt, so ist

$$k_x = -\frac{J_y}{Fz}, \qquad k_y = -\frac{J_x}{Fy}.$$

ın der Kernlinie sämtlicher Randpunkte umschlossene Fläche ist
Um diesen zu finden sind nur die Kernlinien für solche Rand-

punkte P zu zeichnen, deren Tangenten nicht die Randlinie in einem zweiten Punkte schneiden oder berühren, bei eckigen Linien aus geradlinigen Elementen daher nur für die Eckpunkte.

Anmerkung: Wie aus §§ 55 und 56 gefolgert werden kann, ergibt eine exzentrische achsial gerichtete Zug- oder Druckkraft, wenn sie den Querschnitt innerhalb der Kernfigur schneidet, nur Zug- oder nur Druckspannungen.

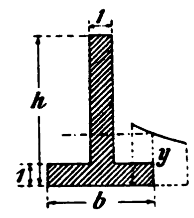


Fig. 103.

40. Wenn in dem Querschnitt Fig. 103 die Höhe h konstant, b hingegen veränderlich ist, welche Gleichung besteht dann für die Schwerpunktshöhe y und die halbe Breite $x = \frac{b}{2}$, und welche Kurve wird durch die Gleichung ausgedrückt?

41. Das Trägheitsmoment J_1 und das Widerstandsmoment W_1 eines Querschnittes inbezug auf eine gewisse Achse I sei gegeben. Wie gross ist das Trägheitsmoment J_2 und das Widerstandsmoment W_2 eines geometrisch ähnlichen Querschnitts von doppeltem Flächeninhalt inbezug auf eine zu I ähnlich liegende Achse II?

42. Berechne das Widerstandsmoment W_x für den Querschnitt Fig. 91, welcher das Element eines Trägerwellenbleches darstellt.

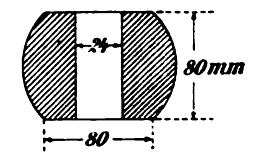


Fig. 104.

43. Berechne das Widerstandsmoment inbezug auf die horizontale Schwerachse für den in Fig. 104 dargestellten Querschnitt einer Hakentraverse.

44. Wie gross wird die Höhe eines mit Fig. 101 ähnlichen Querschnittes, wenn das kleinste der beiden Widerstandsmomente inbezug auf die horizontale Achse 30 cm³ werden soll?

45. Wie gross muss b in Fig. 90 sein, damit das kleinere der beiden Widerstandsmomente für die horizontale Achse ebenso gross wird wie das Widerstandsmoment des Rechtecks von der Breite b und der Höhe 1? Für welche Breite tritt derselbe Fall bei Fig. 87 ein?

Anmerkung: Die Aufgabe zeigt, in welchen Fällen die Biegungsfestigkeit durch Rippen nicht vergrössert, sondern vermindert wird.

. Wie gross ist k (Fig. 105) zu wählen, damit das durch Abschneiden der Dreiecksspitze entstehende Trapez ein möglichst grosses Widerstandsmoment W_x inbezug auf die horizontale Schwerachse erhält, unter W_x das kleinere der beiden Widerstandsmomente verstanden? Zeichne die Kurve W_x/k.

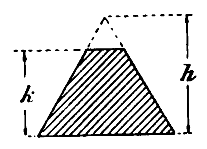


Fig. 105.

. Wie gross ist k (Fig. 106) zu wählen, damit der nach Abschneiden der Quadratspitzen verbleibende Querschnitt ein möglichst grosses Widerstandsmoment erhält?

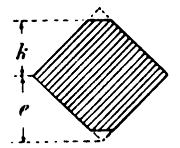


Fig. 106.

. Wie verhalten sich die nach den Aufgaben 46 und 47 gefundenen grössten Widerstandsmomente beziehungsweise zu denen des Dreiecks und des Quadrats?

. Wie gross ist das Widerstandsmoment einer Ringfläche (Fig. 107) ausgedrückt durch den äusseren Durchmesser d und das Höhlungeverhältnis $n = \frac{d_i}{d}$? Zeichne die Kurve, welche n als Abszisse und W/F als Ordinate hat.

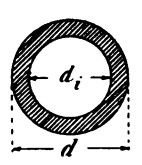


Fig. 107.

Ermittle für die durch 2 Parabeln begrenzte Fläche (Fig. 108) das polare Trägheitsmoment J_z, ferner den Trägheitsradius

$$i = \frac{1}{F}\int r^2 \mathrm{d}F$$

und zeichne mit diesem einen Kreis für z. B. $a = 6$ cm, $b = 3$ cm. Wie gross ist J_z für eine Fläche, welche durch diese Abmessungen in 0,1 der wahren Grösse dargestellt ist?

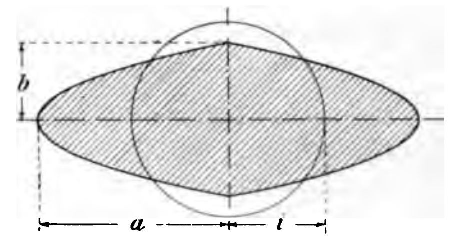


Fig. 108.

Zweite Aufgabengruppe.

Achsiale Belastung gerader Stäbe.

51. An einem Flussstahlstab von der Form und den anfänglichen Abmessungen Fig. 109, wurden beim Festigkeitsversuch auf Zug für die Verlängerung Δl der Messstrecke $NM = l$ und für die Spannkraft K die folgenden zusammengehörigen Werte beobachtet, welche mit der Elastizitätsgrenze beginnen und bis zum Bruch fortgeführt sind:

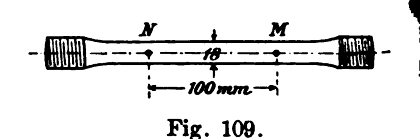


Fig. 109.

Δl	0,093	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15-	16,5	17,3	mm
K	4735	6032	6807	7408	7788	8098	8305	8528	8617	8752	8787	8840	8848	kg.

Man zeichne hiernach eine Kurve, deren Abszisse $10 \Delta l$ und deren Ordinate in Millimeter $0{,}01 K$ ist. Man ermittle sodann die Spannung σ an der Elastizitätsgrenze, die grösste Spannung σ_g vor dem Bruch, den Elastizitätsmodul, die relative Bruchdehnung, die elastische Arbeit und die gesamte Dehnungsarbeit für die Messstrecke.

52. Die Mutter des schmiedeisernen Schraubenbolzens Fig. 110 soll so stark angezogen werden, dass er eine Spannkraft von $K = 2500$ kg ausübt. Auf wieviel Spielraum muss die Mikrometerschraube vor dem Anziehen eingestellt werden, damit sie passt, wenn die richtige Spannung erreicht ist. Dabei sei $E = 2\,100\,000$ kg/qcm. Man rechne die elastische Länge vom Kopf bis Mitte der Mutter (160 mm).

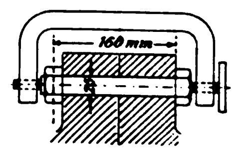


Fig. 110.

ənkige Stabverbindung ABC (Fig. 111) mit den unnachgiebigen n A und C sei so montiert, dass im spannungslosen Zustand, bei auch vom Gewicht der Stäbe abzusehen ist, die Achsen A, B, C ıer Höhe liegen. Die Stäbe sind Rund- ı der Elastizitätsgrenze $\sigma_e = 1600$ kg/qcm Elastizitätsmodul $E = 2\,000\,000$ kg/qcm. ist $a = 40$, $c = 80$, $d = 1{,}5$ cm. Bei Belastung K und welcher Senkung B wird σ_e erreicht? Welche Werte erhält man für K und y_b, e Stabkette vor der Belastung in B bereits mit der Kraft H ge- st?

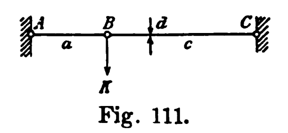


Fig. 111.

› ABC (Fig. 112) ist in A und B unnachgiebig be- .nd hat die anfängliche Spannkraft S_0. Wie gross elastische Senkung Δx_b des Querschnitts B, wenn ine senkrechte Achsialkraft K (in der Zeichnung gegeben) hinzukommt, vorausgesetzt dass K kleiner S_0?

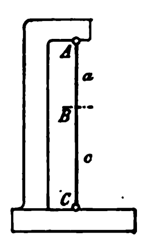


Fig. 112.

ABC (Fig. 113) werde einmal durch das Gewicht ein andermal durch K in B belastet (Maxwellsche hung). Wie gross ist im ersten Falle die Senkung im zweiten die Senkung von C? (Vergl. § 69).

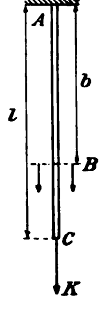


Fig. 113.

oberen Ende befestigter prismatischer Stab vom Querschnitte F Länge l trage am unteren Ende das Belastungsgewicht G_0. Das ıe Gewicht des Stabes sei γ. Wie gross ist die Spannung in ıerschnitt in der Entfernung x vom oberen Ende, und wie gross ist :ung dieses Querschnitts unter Berücksichtigung des Stabgewichts?

miedeiserner Rundstab von 25 mm Dicke sei durch eine Spannkraft $= 19\,635$ kg zerrissen worden (gebrochen). Wie gross ist die ʒe, wenn 1 cbcm Eisen $\gamma = 7{,}8$ g wiegt?

58. Der Eisendraht einer oberirdischen Telegraphenleitung soll nach Fig. 114 in den Punkten A und B von der unveränderlichen Entfernung $2a$ befestigt werden. Wenn zur Zeit der Verlegung eine Temperatur von $t = 18^0$ C herrscht, wie gross muss dabei die Senkung b in der Mitte sein, wenn für $t_1 = -25^0$ C (grösste wahrscheinliche Winterkälte) die Spannung nicht höher werden soll als 1600 kg/qcm? Der Ausdehnungskoeffizient der Wärme ist $\alpha = 0{,}00001235$ für 1^0 C. Z. B. sei $a = 50$ m.

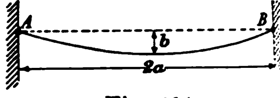


Fig. 114.

59. Ein vierbeiniger Tisch, dessen Beine prismatisch sind und im unbelasteten Zustand den ebenen Boden berühren, werde durch ein ausser der Mitte liegendes Gewicht G belastet. Wie verteilt sich der Druck auf die vier Beine, wenn nur diese elastisch, Tischplatte und Boden hingegen vollkommen starr sind a) für die Gewichtslage Fig. 115, b) für beliebige Lage? Welche Figur (Kernlinie) muss der Schwerpunkt von G beschreiben, damit in je einem Tischbein der Druck die Grenze Null erreicht? Sommerfeld, welcher in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1904, Heft 18 diese statisch unbestimmte Aufgabe andeutet, empfiehlt die Lösung nach der Methode von Castigliano. Man versuche auch ohne dieselbe auszukommen.

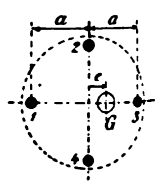


Fig. 115.

60. Ein Förderseil für einen Schacht von 1200 m Teufe, welches eine angehängte Last (Nutzlast + tote Last) von 3500 kg tragen soll, aus Stahldraht (6 Litzen zu 22 Drähten) ist so zu berechnen, dass die Hauptspannung im obersten Querschnitt 1600 kg/qcm beträgt, vorausgesetzt, dass die Drähte mit der Seilmittellinie durchschnittlich einen Winkel von 35^0 bilden und 1 cbcm Stahldraht 0,00786 kg wiegt. Von der durch Biegung um die Seiltrommel entstehenden zusätzlichen Spannung werde hier wie in den Aufgaben 61 und 62 abgesehen.

61. Für die in Aufg. 60 angegebene Förderung ist ein stufenweise verjüngtes Seil mit 6 Stufen zu berechnen, in denen die 6 Litzen der Reihe nach aus 22, 20, 18, 16, 14, 12 Drähten von überall gleicher Dicke bestehen, und deren Länge so bemessen ist, dass in dem obersten Querschnitt jeder Stufe die gleiche Spannung herrscht wie in Nr. 60. Wie verhält sich das Gewicht des verjüngten Seiles zu dem des zylindrischen?

Welche Spannung entsteht in dem obersten Querschnitt des Seiles nach Nr. 60, wenn das auflaufende Seil mit einer Beschleunigung von $\varphi = 5$ m/sec^2 angehoben oder das nahezu abgelaufene Seil mit einer gleich grossen Verzögerung gebremst wird?

Mit welcher grössten Geschwindigkeit darf ein prismatischer Stab (Fig. 116) gegen eine starre Wand stossen, wenn dabei in keinem Querschnitt die Elastizitätsgrenze überschritten werden soll?

Fig. 116.

Ein prismatischer Stahlstab von 5 qcm Querschnitt und 100 cm Länge rotiert in horizontaler Ebene um eine durch seinen Endpunkt gehende senkrechte Achse. Bei welcher Tourenzahl in der Minute erreicht die infolge der Zentrifugalkraft entstehende Spannung die Elastizitätsgrenze $\sigma_e = 2000$ kg/qcm? Ist diese Tourenzahl von der Dicke des Stabes abhängig? Wie gross ist die Verlängerung?

Ein hängender Stab (Fig. 117) soll an seinem unteren Ende die Last G_0 tragen und als Drehkörper so gestaltet werden, dass unter Berücksichtigung des Eigengewichts in allen Querschnitten gleiche Spannung herrscht. Wie lautet die Gleichung zwischen d und x? Um wieviel senkt sich der unterste Querschnitt infolge der gesamten Belastung?

Fig. 117.

Ein in horizontaler Ebene rotierender Stahlstab (Fig. 118) endigt in einer Kugel aus gleichem Material vom Gewicht G_0. Welche Beziehung besteht zwischen d und x des als Drehkörper ausgeführten Stabes, wenn in allen Querschnitten infolge der Zentrifugalkraft gleiche Spannung entstehen soll? Wie gross ist die Verlängerung? Es sei $G_0 = 2$ kg, $r = 55$ cm, $n = 3000$, $\sigma = 1200$ kg/qcm.

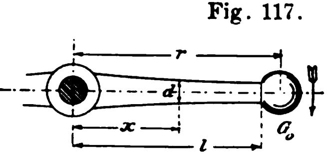


Fig. 118.

7. Eine durch die Kraft K auf Zug beanspruchte Schraube (Fig. 119) soll ihre Gegenkraft durch eine Mutter von solcher Form finden, dass in den Gewinden überall gleicher Flächendruck stattfindet. Die Schraube bestehe aus Stahl, die Mutter aus Bronze. Welche Zug-

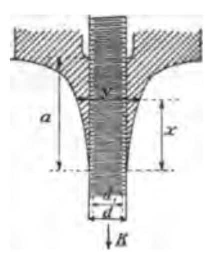


Fig. 119.

spannungen ergeben sich in den Querschnitten der Mutter, wenn vorstehende Bedingung erfüllt wird, verglichen mit der Spannung in dem in gleicher Höhe liegenden Gewindequerschnitt? E für Stahl sei 2 200 000, für Bronze 1 100 000 kg/qcm.

68. Die Trommel einer Dampfwinde (Fig. 120) habe im Zeitpunkt t_0, d. h. in dem Augenblick, in welchem das Seil beginnt sich durch das Anheben der Last G_1 zu spannen, bereits eine kleine Geschwindigkeit c_0 angenommen. Infolgedessen entsteht in dem Seil ein Stoss. Wie gross ist die hierbei auftretende grösste Spannung in dem Seil, wenn das Trägheitsmoment der Trommel durch eine im Windungskreis konzentrierte Masse vom Gewicht G_2 ersetzt werden kann bei Vernachlässigung des Seilgewichts?

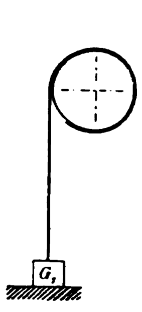


Fig. 120.

69. Ein am oberen Ende befestigter prismatischer Stab (Fig. 121) dient dem Gewicht G als Führung, welches zunächst im Abstand h von der Stossplatte P festgehalten, sodann plötzlich losgelassen wird. Die Vorgänge vom Beginn der Berührung des Gewichtes mit der Stossplatte an sind zu beschreiben und durch Rechnung zu verfolgen. Insbesondere ist zu ermitteln: die grösste in dem Stab auftretende Zugspannung Max σ und die Dauer einer Schwingung a) ohne, b) mit Berücksichtigung der Masse des Stabes. Wie gross ist Max σ, wenn $h = 0$ ist? Angenommen werde, dass die Elastizitätsgrenze nicht erreicht wird.

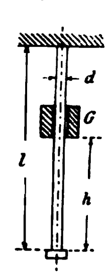


Fig. 121.

70. Wenn ein gerader Stab bei veränderlicher Temperatur t gehindert ist, sich auszudehnen oder zusammen zu ziehen, so ergibt sich für je einen Grad der Temperaturerhöhung eine bestimmte Spannungsänderung, welche durch $\frac{d\sigma}{dt}$ ausgedrückt werden kann (S. 57). Wie kann man dieses Verhältnis innerhalb der Giltigkeitsgrenzen des Hookeschen Gesetzes durch E und α ausdrücken, und wie gross ist dasselbe z. B. für Gusseisen, wenn $E = 900 000$ kg/qcm, $\alpha = 0,0000111$ ist?

Dritte Aufgabengruppe.

Biegung gerader Stäbe.

1. Man entwickle die tabellarisch gruppierten Gleichungen in § 60 a) nach § 58, b) nach § 59, c) nach § 72.

2. Für den Belastungsfall Fig. 122 bestimme man: a) die grösste Spannung im gefährlichsten Querschnitt, b) die Senkung und die Neigung der elastischen Linie im Angriffspunkt der Kraft P, c) die Koordinaten für den tiefsten Punkt der Linie, d) die elastische Energie des ganzen Stabes. Welche Vereinfachungen ergeben sich für den Fall $a = b$?

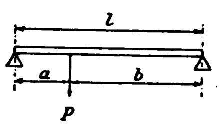


Fig. 122.

3. Für den Belastungsfall Fig. 123 bestimme man: a) die grösste Spannung im gefährlichsten Querschnitt, b) die Senkung und Neigung der elastischen Linie im Angriffspunkt der Kraft P, c) die Koordinaten für den höchsten Punkt der Linie.

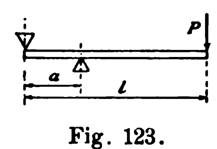


Fig. 123.

4. Für die Belastungsfälle Figg. 124, 125, in denen eine gleichförmig verteilte Kraft G wirkt, ist die grösste Materialspannung und die grösste Senkung der elastischen Linie zu ermitteln.

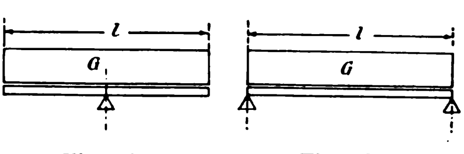


Fig. 124. Fig. 125.

In welcher Entfernung a sind die Stützen eines nur durch sein Eigengewicht belasteten Trägers (Fig. 126) anzuordnen, damit im Mittelschnitt und

in den unterstützten Querschnitten gleiche Anstrengung stattfindet? Für welchen Wert a wird die Senkung in den Endpunkten so gross wie im Mittelschnitt? Für welchen Wert a werden die Biegungswinkel in den unterstützten Punkten der elastischen Linie Null?

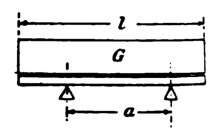


Fig. 126.

76. Wie ist für den symmetrisch belasteten Balken Fig. 127 der Stützenabstand a zu wählen, damit der Biegungspfeil in der Mitte möglichst gross wird? In welchem Falle ist die Erhebung in der Mitte so gross wie die Senkung in den Endpunkten? Welche Form hat die elastische Linie zwischen den Stützen?

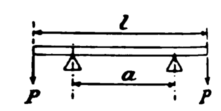


Fig. 127.

77. Für einen Brückenträger habe die Berechnung nach dem Belastungsfall Fig. 125 den mittleren Querschnitt Fig. 128 ergeben. Wie lang im Verhältnis zur Stützweite l muss die äusserste Gurtungsplatte sein (abgesehen von einer zur Vernietung erforderlichen kleinen Zugabe), wenn die Spannung in keinem Querschnitt grösser werden soll als in der Mitte?

Anmerkung: Die Querschnitte durch Nietlöcher auf der Zugseite sind abzuziehen.

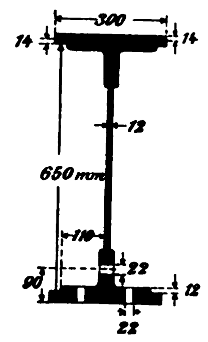


Fig. 128.

78. Für einen nach Fig. 123 angeordneten Kranträger, zu welchem zwei zusammengenietete Eisenbahnschienen von der Form Fig. 102 verwendet werden sollen, habe die Festigkeitsrechnung eine Maximalspannung $\mathfrak{S} = 1130$ kg/qcm ergeben, während nur $\mathfrak{S} = 1000$ kg/qcm zugelassen werden soll. Welche Dicke d eines zwischen die Schienen zu nietenden Flacheisens ist erforderlich, damit $\mathfrak{S} = 1000$ kg/qcm wird?

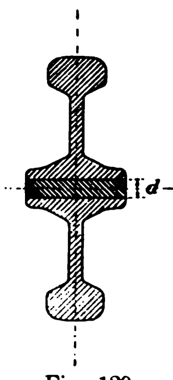


Fig. 129.

79. Aus einem Stamm vom Durchmesser d soll ein rechteckiger Balken g[illegible] schnitten werden. Wie gross ist das Verhältnis der Seiten $\frac{b}{a}$ zu wähl[illegible]

damit die Biegungsfestigkeit des Balkens möglichst gross wird? Hierbei ist zunächst vom Eigengewicht abzusehen, sodann aber zu prüfen, wie sich infolge desselben das Verhältnis $\frac{b}{a}$ ändern müsste, wenn die Verwendung des Balkens dem Fall Fig. 125 entspricht.

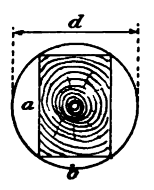


Fig. 130.

0. Ein gusseiserner Balken von $l = 4$ m und dem Querschnitt Fig. 131, welcher nach Fig. 125 mit $p = 750$ kg/m durch eine Mauer belastet ist, soll deren Breite $b = 25$ cm erhalten, während die Höhe h so zu wählen ist, dass im Mittelschnitt die Druckspannung doppelt so hoch wird als die Zugspannung. Wie gross wird c für $\mathfrak{S} = 250$ kg/qcm in der Mitte, wie gross in den Entfernungen 0,5 m, 1 m, 1,5 m aus der Mitte, wenn in allen Querschnitten gleiche Sicherheit herrschen soll?

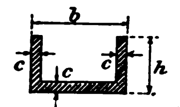
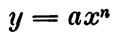


Fig. 131.

1. Man kann für die deutschen Normalprofile der I-Träger die Werte für den Flächeninhalt F, für die Hauptträgheitsmomente J_x und J_y, für die Widerstandsmomente W_x und W_y, endlich für $\frac{W_x}{F}$ und $\frac{W_y}{F}$ mit grosser Annäherung durch Gleichungen von der Form



$$y = ax^n$$

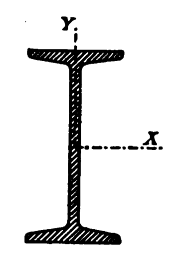


Fig. 132.

darstellen. Man bestimme die Konstanten a und n unter Benutzung der Tabellen des Normalprofilbuchs. Wie würden die gesuchten Gleichungen lauten, wenn die Profile unter einander geometrisch ähnlich wären?

2. Zur Unterstützung einer über einem Hohlraum befindlichen Böschung sollen normale I-Träger aus Flusseisen im Abstand a von Mitte zu Mitte verwendet werden (s. Fig. 133). Welche Trägersorte ist zu benützen, wenn $l = 3$ m, $b = 2$ m, $a = 1{,}5$ m und das Gewicht des Böschungsmaterials $\gamma = 900$ kg/cbm ist?

3. Die in Fig. 134 dargestellte Zementmörtelstufe (Spez. Gewicht $\gamma = 2$ kg/l) brach bei einer Belastung $K = 702$ kg. Wie gross war die Bruchspannung im gefährlichsten Querschnitt?

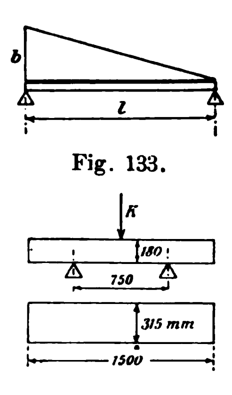


Fig. 133.

Fig. 134.

84. Für die einseitig fixierten Träger Fig. 135 und Fig. 136 ist der Querschnitt ein Rechteck und zwar bei Fig. 135 von konstanter Höhe h, bei Fig. 136 von konstanter Breite b. Die Form ist für beide Fälle so zu bestimmen, dass alle Querschnitte gleiche Festigkeit haben. Wie gross ist die elastische Senkung des Angriffspunktes, die elastische Arbeit und der Materialaufwand im Vergleich zum prismatischen Balken von gleichem Befestigungsquerschnitt?

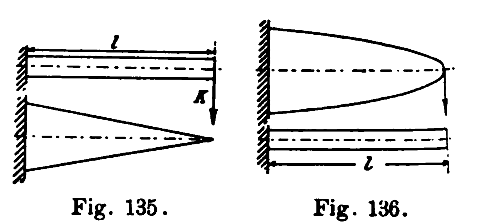


Fig. 135. Fig. 136.

85. Die horizontale Welle (Fig. 137) werde durch ein in der Mitte sitzendes Rad mit 1500 kg belastet.

Welchen Durchmesser erhält die Welle in der Mitte für $\mathfrak{S} = 600$ kg/qcm? Wie gross ist die Senkung in der Mitte und die Neigung der elastischen Linie in den Lagern a) wenn die Welle zylindrisch ist, b) wenn sie als Körper gleicher Querschnittsfestigkeit ausgeführt wird?

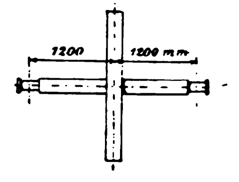


Fig. 137.

Anmerkung: Die Länge der Zapfen und die Breite des Rades mag zur Vereinfachung der Rechnung gleich Null gesetzt werden. Der Vergleich zwischen a) und b) zeigt, dass die zylindrische Form zwar etwas mehr Material kostet, jedoch hinsichtlich der Deformation sehr im Vorteil ist.

86. Für einen einseitig fixierten Träger von kreisförmigem Querschnitt ist die Meridianlinie so zu bestimmen, dass in allen Querschnitten gleiche Bruchgefahr herrscht a) ohne, b) mit Berücksichtigung des Eigengewichts. Dabei sei $l = 3$ m, $\mathfrak{S} = 500$ kg/qcm und die biegende Kraft im Endpunkt $K = 100$ kg.

87. Ein Balken von rechteckigem Querschnitt (Fig. 138), welcher in den Endpunkten unterstützt ist und durch eine von der Mitte nach den beiden Enden gleichmässig zunehmende Kraft p kg/cm belastet wird, soll so berechnet werden, dass bei kon-

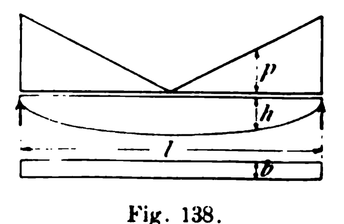


Fig. 138.

stanter Breite und veränderlicher Höhe des Querschnitts sämtliche Querschnitte gleich angestrengt sind.

Anmerkung: Die hier vorausgesetzte symmetrische Dreiecksbelastung kommt bei den radialen Rippen von kreisförmigen Platten, z. B. von Ringventilen, vor.

88. In welcher Entfernung x entsteht in den Laufschienen eines Laufkrans (Fig. 139) die grösste Spannung, wenn jedes der beiden Laufräder die Kraft K ausübt, vorausgesetzt dass $b < a$ ist? Wie gross ist das grösste biegende Moment?

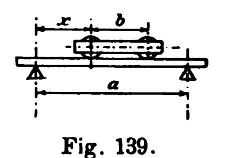


Fig. 139.

89. Die im spannungslosen Zustand gerade Stahlfeder AB (Fig. 140), welche bei A an einer ebenen Unterlage, bei B an einer Walze befestigt (fixiert) ist, nimmt unter Einwirkung der Kraft K die in der Zeichnung angedeutete Form an. Wie gross ist K, wenn die Stahlfeder 40 mm breit, 0,45 mm dick, der Halbmesser der Walze 100 mm, der Elastizitätsmodul der Feder 2000000 kg/qcm, das Gewicht der Walze $G = 1{,}844$ kg ist? Welche Form hat die elastische Linie zwischen den Berührungspunkten an Unterlage und Walze?

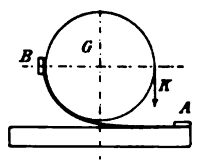


Fig. 140.

90. Der federnde Stab Fig. 141 soll, durch die Kräfte KK belastet, die ebene Unterlage stetig berühren. Nach welcher Linie muss der Stab gekrümmt sein, damit überall der gleiche Druck p kg/cm entsteht? Man zeichne den Stab für $l = 40$ cm, $p = 15$ kg/cm und für quadratischen Querschnitt, bei $\mathfrak{S} = 2500$ kg/qcm, $E = 2\,000\,000$ kg/qcm.

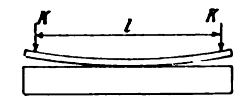


Fig. 141.

1. Welche Gestalt muss die Feder AB (Fig. 142) erhalten, damit sie die mit konstanter Kraft K belastete Rolle R in jeder Stellung in druckfreier Berührung mit der oberen, starren Führungsebene erhält a) für den Fall, dass der Endpunkt B vollkommen frei ist, b) für den Fall, dass B drehbar gestützt ist.

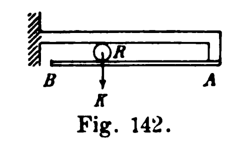


Fig. 142.

Welche Horizontalkraft ist, von der Reibung abgesehen, in jedem der beiden Fälle notwendig, um die Rolle längs AB zu bewegen?

92. Die Balken A und B berühren sich im druckfreien Zustand mit ebenen Flächen. Die Mittelkraft K soll durch A so auf B übertragen werden, dass in der Berührungsfläche ein gleichmässiger Druck p kg/cm entsteht. Wie sind die Balken A und B bei rechteckigem Querschnitt zu gestalten, wenn ausserdem in allen Querschnitten von A die gleiche Anstrengung stattfinden soll, und wie, wenn diese Bedingung für B gestellt wird?

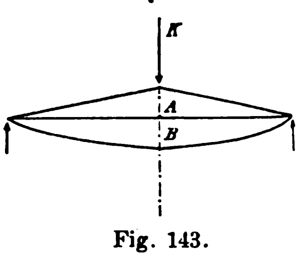


Fig. 143.

Welche Form erhalten die Balken A und B, wenn beziehungsweise B und A Prismen sind?

93. Für den einseitig fixierten Stab Fig. 144 werde angenommen, dass die biegende Kraft K mit der Lotlinie den Winkel α bildet, der von 0 bis 360° wechseln kann. Die Abhängigkeit zwischen $\mathfrak{S}$ und α ist zu unter-

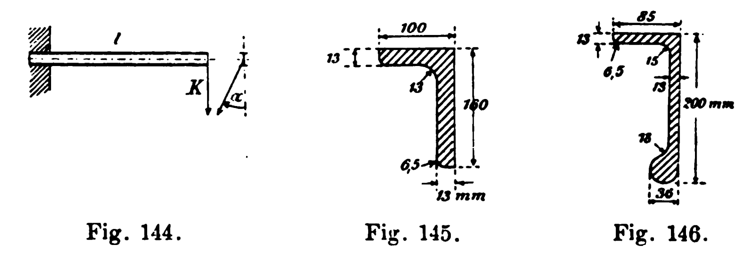


Fig. 144. Fig. 145. Fig. 146.

suchen a) für ein normales **I**-Profil, b) für Profil Fig. 93, c) für Fig. 145 d) für Fig. 146. Welche Kurve beschreibt der Endpunkt der elastischen Linie? Welche Kurve erhält man, wenn man die jeder Kraftrichtung entsprechende elastische Energie als Radiusvektor auf die Kraftrichtung aufträgt?

94. Am Ende einer mit horizontaler Achse rotierenden Welle ist ein rechteckiger Stab (Fig. 147) befestigt, der sich unter dem Einfluss seines Eigengewichts etwas biegt. Welche Kurve beschreibt der Endpunkt der elastischen Linie bei langsamer Drehung?

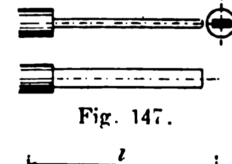


Fig. 147.

95. Der Stab Fig. 148 werde einmal in I, ein andermal in II durch die Kraft K belastet. Wie gross ist im ersten Falle die Senkung in II, im zweiten die Senkung in I? (s. § 69.)

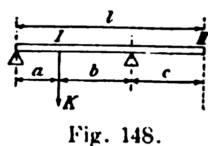


Fig. 148.

Der Stab Fig. 149 sei bei A eingeklemmt, bei C im unbelasteten Zustand druckfrei gestützt. Welcher Auflagedruck bei C und welcher Deformations- und Spannungszustand entsteht a) infolge der Belastung K, b) infolge des Eigengewichtes?

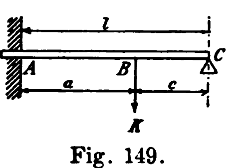


Fig. 149.

Der auf drei gleich hohen, symmetrisch angeordneten Stützen ruhende Balken (Fig. 150) ist nur durch eine gleichförmig über die ganze Länge verteilte Kraft, z. B. durch sein Eigengewicht G belastet. Welche Drucke erfahren die Stützen A, B, C, und welcher Deformations- und Spannungszustand entsteht in dem Stab (Kontinuierlicher Träger)?

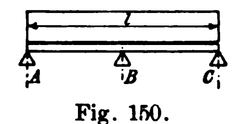


Fig. 150.

Der Balken Fig. 151 biegt sich unter der gleichförmig verteilten Last G soweit durch, dass er die ausser der Mitte liegende Stütze C mit belastet. Welche Drucke erfahren die Stützen A, B, C? Welcher Deformations- und Spannungszustand entsteht in dem Balken?

Wie gross ist für den besonderen Fall $a = b$ der Abstand u zu machen, damit a) die drei Stützen gleichen Druck erfahren, wie gross, damit b) die Anstrengung des Balkens möglichst klein wird?

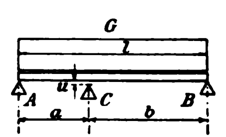


Fig. 151.

Man bestimme die Stützreaktionen sowie den Spannungszustand für die kontinuierlichen Träger Figg. 152, 153, 154.

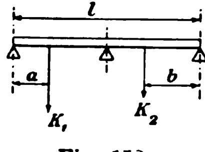


Fig. 152.

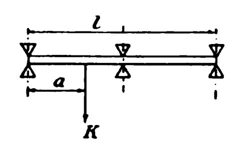


Fig. 153.

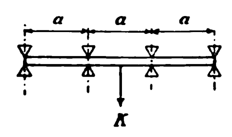


Fig. 154.

Wie gross wird a für Fig. 153, wenn in dem Angriffspunkte der Kraft K die Tangente der elastischen Linie horizontal bleiben soll?

Die Träger können als zylindrische Wellen, die Stützen als Lager nach Sellersscher Bauart aufgefasst werden.

Man rechne Zahlenbeispiele.

100. Der durch ein Hängewerk verstärkte Balken Fig. 155, welcher eine gleichförmig verteilte Belastung zu tragen hat, soll auf der Strecke BD nirgends stärker beansprucht werden als in deren Endpunkten B und D. Wie ist $BD = a$ zu wählen, wenn bei gegebener Länge $AE = l$ die Tragfähigkeit möglichst gross werden soll?

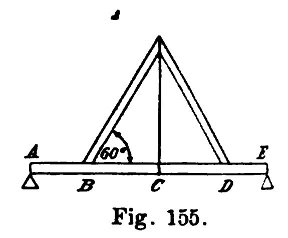


Fig. 155.

101. Eine schmiedeiserne Welle von 8 cm Dicke und 200 cm Länge sei an den Enden und in der Mitte gelagert; das mittlere Lager sei jedoch um 1 mm aus der Achse der beiden anderen Lager montiert. Welcher Druck entsteht hierdurch in den drei Lagern? Welche Spannung entsteht in der Welle? Welche unnötige Reibungsarbeit wird durch den Fehler verbraucht, wenn die Welle 200 Umdrehungen in der Minute macht und der Koeffizient der Zapfenreibung $\mathfrak{R} = 0{,}08$ ist?

102. Welcher Deformations- und Spannungszustand entsteht unter Einfluss des Kräftepaares Kh in dem an beiden Enden eingeklemmten Balken Fig. 156?

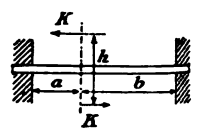


Fig. 156.

103. Wie gross ist der Zwischenraum u zwischen den quadratischen Holzbalken von 20×20 cm Querschnitt (Fig. 157) vor der Belastung anzunehmen, damit die Tragkraft beider in gleichem Masse ausgenutzt wird, und wie gross ist dieselbe für $E = 120\,000$ kg/qcm, $\mathfrak{S} = 100$ kg/qcm?

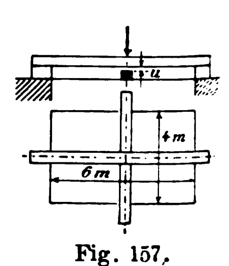


Fig. 157.

104. Welche Druckverteilung findet zwischen den Balken Fig. 158 infolge der Belastung durch K statt, wenn sich die Balken im spannungslosen Zustand druckfrei berühren? Entsteht eine verteilte Kraft von A bis B oder eine konzentrierte Kraft im Endpunkt des unteren Balkens?

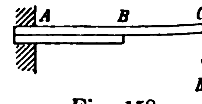


Fig. 158.

105. Die Berechnung einer Lamellenfeder, Fig. 159, pflegt man näherungsweise so vorzunehmen, als lägen sämtliche Lamellen nicht über, sondern neben einander zu einer einzigen Platte verbunden, wie in Fig. 159 für die Hälften der Lamellen angedeutet. Worin besteht der Fehler dieses

Näherungsverfahrens? Wie gross ist für eine Feder von den Abmessungen der Fig. 159 und für $K = 6000$ kg die grösste Spannung und die Durchbiegung nach dem Näherungsverfahren und nach genauer Rechnung?

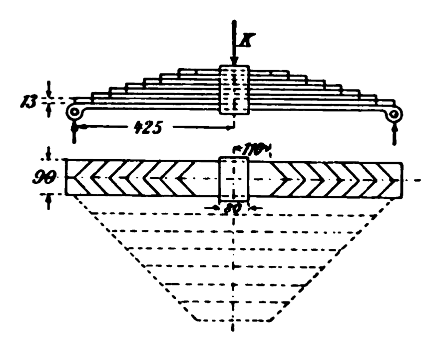


Fig. 159.

6. Ein Baumstamm (Fig. 160) von der Länge l und den Enddurchmessern d_1 und d_2, dessen Gestalt als abgestumpfter Kegel aufgefasst werden kann, soll in zwei Punkten unterstützt werden. Wie sind die Abstände a und b zu wählen, wenn die Anstrengung des Holzes durch die Eigenschwere möglichst klein werden soll? Wie gross sind für eine solche Lage der Stützen die Senkungen der Endpunkte und die grösste Senkung zwischen den Stützen? Graphostatisch zu lösen.

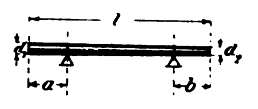


Fig. 160.

Zahlenbeispiel: $l = 16$ m, $d_1 = 0{,}5$ m, $d_2 = 0{,}3$ m, $\gamma = 0{,}5$ kg/l, $E = 100\,000$ kg/qcm.

7. Welche Dicke muss ein gerader Draht von 1 m Länge erhalten, damit bei Biegungsbelastung durch das Eigengewicht seine elastische Linie mit derjenigen einer Eisenbahnschiene von 12 m Länge und ähnlicher Stützung ähnlich wird?

8. Nach Versuchen von Bach und nach Schüle ist für eine gewisse Sorte Gusseisen das Hookesche Gesetz zu ersetzen durch

$$\sigma^{1,066} = 1\,381\,700\ \varepsilon \quad \text{für Druck},$$
$$\sigma^{1,395} = 1\,132\,700\ \varepsilon \quad \text{„ Zug}.$$

Man suche die Exzentrizität e_0 der neutralen Linie für den kreisförmigen Stabquerschnitt bei reiner Biegung unter Beibehaltung der Bernoullischen Hypothese (§ 50) für $\text{Max}\,\sigma = 800$ kg/qcm.

Anleitung: Man zeichne für eine beliebige Exzentrizität e_1 der neutralen Linie $S = \int \sigma dF$ als Fläche, planimetriere sie und stelle sie als Strecke dar. Dieses Verfahren für 2 andere e wiederholt, liefert für eine

Kurve S/e 3 Punkte und damit die Kurve selbst genau genug, um e_0 für $S = 0$ zu finden.

109. Welche Länge l muss ein quadratischer, ursprünglich prismatischer Stahlstab haben, welcher, an den Enden frei aufliegend, unter Voraussetzung senkrecht wirkender Stützreaktionen, durch sein Eigengewicht bis zur Elastizitätsgrenze beansprucht werden soll? Wie gross ist die Senkung in der Mitte?

Zahlenbeispiel: Quadratseite $a = 2$ cm, $E = 2\,200\,000$ kg/qcm. $\gamma = 7{,}86$ kg/l, $\sigma_e = 2500$ kg/qcm.

110. Die zylindrische Gelenkstange Fig. 161, deren Kurbeln n Umdrehungen pro Minute machen, erfährt in der gezeichneten Stellung die stärkste Biegungsbelastung infolge der Zentrifugalkraft. Wie gross ist die entstehende grösste Spannung im gefährlichsten Querschnitt, und wie gross ist die Durchbiegung daselbst?

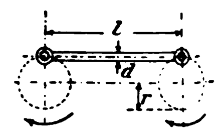


Fig. 161.

Zahlenbeispiel: $r = 0{,}4$ m, $l = 2$ m, d = 80 mm, $n = 250$. $E = 2100000$ kg/qcm, $\gamma = 7{,}85$ kg/l.

111. Man ermittle durch Zeichnung die in Fig. 162 dargestellte Form der elastischen Linie eines ursprünglich geraden Stabes, bei welcher die Endtangenten mit der Kraftrichtung einen rechten Winkel $\delta = 90^0$ bilden.

Fig. 162.

Anleitung: In der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{JE} = \frac{K}{JE}k,$$

in welcher k der Krafthebelarm von K inbezug auf ein elastisches Element ist, setze man $\frac{K}{JE} = \frac{1}{p^2}$, unter p eine konstante Strecke, den Parameter der elastischen Linie verstanden. Setzt man dann die elastische Linie von A beginnend, aus Elementen von etwa $\Delta s = 1$ cm zusammen, so kann für jedes neue Element, ehe noch dessen ϱ bekannt ist, der Krafthebelarm k hinreichend genau abgestochen werden. Berechnet man dann $\varrho = \frac{p^2}{k}$, was auch graphisch geschehen kann, so kann das Element als Kreisbogen gezeichnet werden. Aus der Aneinanderreihung derartiger Kurvenelemente erhält man die vollständige elastische Linie.

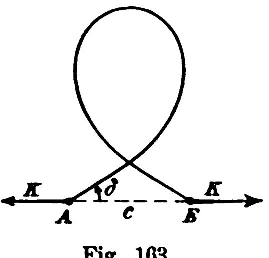


Fig. 163.

Aufgabe 109 werde mit Bezug auf Fig. 163 in der Weise abgeändert, dass der Reihe nach $\vartheta = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80^\circ$ wird. Für jede der erhaltenen Kurven (einschliesslich der für $\vartheta = 90^\circ$) drücke man aus $\frac{l}{p}$ und $\frac{c}{p}$, unter l die Länge der elastischen Linie, unter c die kürzeste Entfernung AE der Endpunkte verstanden.

Die Linie Fig. 164 stelle die elastische Linie eines ursprünglich geraden Stabes von der Länge l dar, dessen Endpunkte durch ein reibungsloses Gelenk verbunden sind. Welchen Winkel ϑ bilden die Endtangenten mit der Kraftrichtung? Wie gross in Teilen von l ist der Durchmesser d?

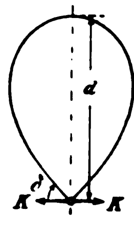


Fig. 164.

Anleitung: Zur analytischen Lösung mit Hilfe elliptischer Integrale kann das S. 69 zitierte Werk von K. Kriemler empfohlen werden. Eine ausreichend genaue Lösung erhält man, wenn man die in Aufgabe 112 verlangten Werte $\frac{c}{p}$ als Ordinaten einer Polarkurve darstellt, deren Amplituden die ϑ sind. Wo die Kurve die Achse schneidet, hat ϑ den gesuchten Wert. Mit diesem Winkel die Verzeichnung der elastischen Linie wie bei den vorigen Aufgaben beginnend, muss sich $c = 0$ ergeben.

Man zeichne die elastische Linie mit Bezug auf Fig. 165 für $\vartheta = 10$, 20, 30°, suche $\frac{l}{p}$ für jede dieser Kurven auf und zeichne eine Polarkurve mit den Amplituden ϑ und den Radienvektoren $\frac{l}{p}$.

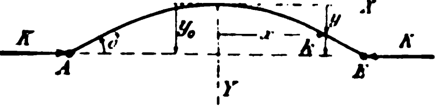


Fig. 165.

Verlängert man diese Polarkurve bis zu dem Grenzfall $\vartheta = 0$, der dem Zustand entspricht, in welchem der Stab durch die Kräfte KK noch nicht gebogen wird, während eine kleine Zunahme dK die Biegung hervorbringen würde, so erhält man den Grenzwert $l = 3{,}14p = \pi p$, der sich wegen der hier stattfindenden Übereinstimmung zwischen ds und dx auch rechnerisch ohne elliptische Integrale finden lässt.

Lösung: Nach den Gleichungen (192) und (193) und nach Aufg. 111 ist

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{Kk}{EJ} = \frac{k}{p^2}.$$

Nach Fig. 165 ist aber $y = y_0 - k$, also $y'' = -k''$, demnach

$$-k'' = \frac{k}{p^2} \quad \text{oder} \quad -dk' = \frac{k}{p^2}dx.$$

Multipliziert man links mit k', rechts mit dem gleich grossen $\frac{dk}{dx}$, so folgt

$$-k'dk' = \frac{kdk}{p^2}.$$

Die erste Integration ergibt $-k'^2 = \frac{k^2}{p^2} + C_1$. Da aber für den Mittelpunkt $k' = 0$ und $k = y_0$ ist, so wird $C_1 = -\frac{y_0^2}{p^2}$, also $k'^2 = \frac{y_0^2 - k^2}{p^2}$.

$$dx = -\frac{pdk}{\sqrt{y_0^2 - k^2}}.$$

Die zweite Integration ergibt $x = -p \arcsin\left(-\frac{k}{y_0}\right) + C_2$, und, da für den Mittelpunkt $x = 0$ und $\frac{k}{y_0} = 1$ ist, so wird $C_2 = -\frac{\pi}{2}p$. Mithin ist

$$x = -p\left(\arcsin\left(-\frac{k}{y_0}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

die Gleichung der unendlich wenig gebogenen elastischen Linie. Für $x = \pm\frac{l}{2}$ wird $k = 0$, also, abgesehen von dem Richtungsvorzeichen, $l = \pi p$, wie oben behauptet.

Anmerkung: Ersetzt man wieder den in Aufg. 111 definierten Parameter p durch seinen Wert $p = \sqrt{\frac{EJ}{K}}$, so erhält man

$$K = \pi^2 \frac{EJ}{l^2},$$

d. i. die Eulersche sogenannte Knickformel für den Gelenkstab. In dieser Gleichung ist y_0 nicht enthalten: es ist also $\frac{dK}{dy} = 0$ oder $dy = \infty dK$, und es zeigt sich hiermit, dass, wenn K den obigen Wert erreicht hat, eine sehr kleine Zunahme genügen wird, eine Durchbiegung y_0 hervorzubringen, die das zulässige Mass überschreiten, sogar den Bruch zur Folge haben kann.

Dass y_0 in Wirklichkeit von K abhängig ist, ergibt die genauere Untersuchung der elastischen Linie, bei welcher $ds^2 = dx^2 + dy^2$ zu setzen wäre.

15. Die Verbindung einer Schieberstange A (Fig. 166) mit der Exzenterstange B soll durch ein stählernes Blattgelenk von der Breite c und der Dicke d vermittelt werden.

Unter der Annahme, dass zur Schieberbewegung eine Kraft $K = 2000$ kg erforderlich ist und für $e = 2{,}5$, $f = 6$, $g = 55$, $h = 30$, $i = 68$ cm soll das Blattgelenk so berechnet werden, dass die entstehende Spannung in keinem Punkte grösser wird als $\mathfrak{S} = 800$ kg/qcm. Nach Feststellung der Form sind noch die grössten Drucke in den Führungen der Schieberstange und die von denselben abhängigen Reibungen mit $\mathfrak{R} = 0{,}2$ (Reibungsfaktor) zu berechnen, deren Betrag in dem gegebenen Wert für K schon berücksichtigt sein mag.

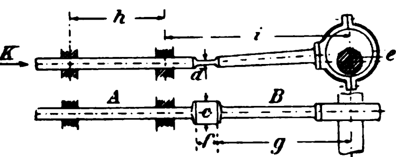


Fig. 166.

16. Die gusseiserne Schwungkugel eines Regulators befinde sich am Ende einer Blattfeder AE (Fig. 167), welche in der Ruhe die Form eines Prismas mit senkrechter Achse hat. Welche Anstrengung der Feder und welche Bewegungen des Kugelmittelpunktes Δx und Δz werden sich ergeben, wenn die Regulatorwelle mit n Touren pro Minute gleichförmig rotiert?

Zahlenbeispiel: Kugelgewicht $G = 12$ kg, $a = 15$ cm, $b = 60$ cm, $c = 5$ cm, $d = 1{,}2$ cm, $n = 200$.

Anleitung: Man vernachlässige zunächst die Zentrifugalkraft der Feder, suche jedoch nachträglich den hiermit begangenen Fehler wenigstens näherungsweise zu bestimmen.

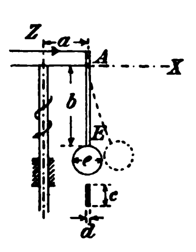


Fig. 167.

17. Ein im freien Zustand gerader Draht sei, wie Fig. 168 zeigt, in A an einem Zylinder vom Halbmesser r befestigt, in E durch ein Gewicht G belastet. Die Form der elastischen Linie ist zu bestimmen.

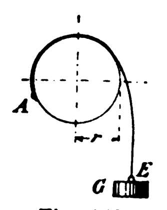


Fig. 168.

18. Ein elastischer, im spannungslosen Zustand gerader Stab, Fig. 169, von der Länge l werde mit den Enden in den festen Punkten A und E, deren Abstand a kleiner als l ist, befestigt und in der Mitte durch einen Zylinder vom Halbmesser r und dem Gewicht G belastet.

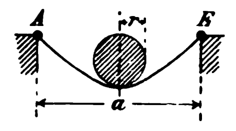


Fig. 169.

Man ermittle die Anstrengung des Stabes und die Form der elastischen Linie.

119. Am Kreuzkopf einer Dampfmaschine sei zum Zwecke des Indikatorantriebes ein schmiedeiserner Rundstab von der Dicke d und der Länge l so befestigt, dass seine Achse mit der Zylinderachse einen rechten Winkel bildet. Die Pleuelstange habe die fünffache Länge des Kurbelradius r.

Welche Anstrengung entsteht in dem Stab, und welche elastische Bewegung erleidet der Endpunkt infolge der Beschleunigung bei einer minutlichen Tourenzahl n? In welcher Kurbellage ist diese am grössten?

Zahlenbeispiel: $d = 2$ cm, $l = 60$ cm, $r = 40$ cm, $n = 200$.

120. Ein prismatischer Stab AE (Fig. 170) von der Länge l, dessen Querschnitt ein Quadrat von der Seite a ist, sei um eine am Ende A befindliche horizontale Achse drehbar, während das andere Ende E auf einer Unterlage ruht. Der Stab werde in die Stellung I gebracht und dann sich selbst überlassen. Durch den zwangläufigen Fall gelangt er mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_2 in die Stellung II, in welcher die Bewegung des Punktes E plötzlich unterbrochen wird, während sich die zwischen A und E liegenden Teile noch weiter bewegen. Die hierbei entstehenden Deformationen und Spannungen sind zu untersuchen.

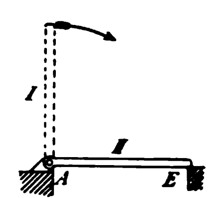


Fig. 170.

Zahlenbeispiel: $l = 2$ m, $a = 1{,}2$ cm. Material Schmiedeisen.

Vierte Aufgabengruppe.

Aufgaben über Biegung fester und beweglicher Stabverbindungen.

1. Der Stabwinkel 012 (Fig. 171) aus Quadrateisen von d cm Dicke werde durch die Kraft K belastet. Wie ist K gerichtet, wenn in den Querschnitten 0 und 1 die gleiche Bruchgefahr stattfindet? Wie gross sind die elastischen Wege Δx_2 und Δy_2 und der Biegungswinkel β_2 des Querschnitts 2, welche durch die Komponenten K_x und K_y sowie durch ein in 2 angreifendes Kräftepaar vom Moment M_2 (rechtsdrehend) bewirkt werden? Wie gross ist, für $K_y = 1$, K_x und M_2, wenn $\Delta x_2 = \Delta y_2 = \beta_2 = 0$ sein sollen?

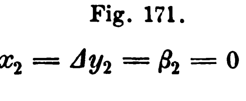


Fig. 171.

2. Welche Länge erhält der Arm c in dem Stabeck 0 1 2 3 (Fig. 172), wenn unter dem Einfluss der senkrecht wirkenden Kraft K der Biegungswinkel $\beta_2 = 0$ werden soll? Wie gross sind für diesen Fall die Wege Δx_2 und Δy_2?

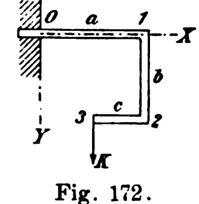


Fig. 172.

3. Durch eine unbekannte Kraft Q werde in dem Stabeck 0 1 2 3 (Fig. 173) die Senkung Δy_3 des Punktes 3 hervorgebracht. Wie gross ist die gleichzeitig stattfindende Senkung Δy_4? Wie gross wird Δy_3, wenn Q nach 4 verlegt wird?

Zur Vereinfachung der Rechnung sei $b = 0$.

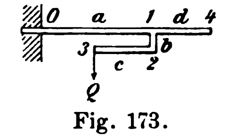


Fig. 173.

4. Ein eisernes Gerinne erhält zur Verstärkung der Blechwände Walzeisenrippen von der Form Fig. 174. Wie gross muss, wenn b und h gegeben sind, der Abstand a der Längsträger sein, wenn in den Quer-

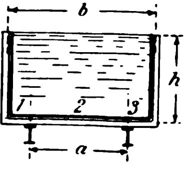


Fig. 174.

schnitten 1, 2, 3 gleiche Bruchgefahr stattfinden soll. Welches ist der grösste Wert $\frac{h}{b}$, bei welchem sich diese Bedingung noch erfüllen lässt?

125. Der winkelförmig gestaltete Hobelstahl (Fig. 175) werde mit einer Einrichtung versehen, welche ermöglicht, die Grösse Δ des elastischen Weges der Schneidkante und den Winkel α zu messen, welchen Δ mit der Schnittfläche bildet. Wie lässt sich hiernach die Grösse der auf die Schneidkante wirkenden Kraft Q und der Winkel φ berechnen, welchen Q mit der Schnittfläche bildet? In welchem Querschnitt des Stahles findet die grösste Spannung statt, und wie gross ist sie?

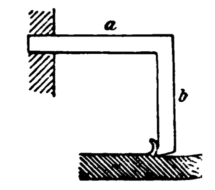


Fig. 175.

Zur Vereinfachung der Rechnung kann angenommen werden, dass die Schneide in der Mittelebene des Armes b liegt.

Zahlenbeispiel: Der Stahlquerschnitt sei ein Quadrat von 3 c Seite, $a = b = 18$ cm, $\Delta = 0{,}05$ cm, $\alpha = 30^0$.

126. Welche Momente entstehen in dem Winkel 0 1 2 (Fig. 176) in den Schnitten 0 und 1 durch die Kraft K, und welcher Druck kommt auf die Gelenkstrebe c? Wie ist die Resultante der in 2 angreifenden, auf den Stabwinkel wirkenden Kräfte gerichtet?

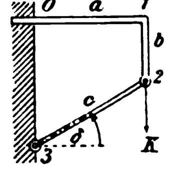


Fig. 176.

127. Wenn der Stabwinkel ABC (Fig. 177) im unbelasteten Zustand die Befestigungswand bei C druckfrei berührt, wie gross ist der infolge der Belastung K entstehende Druck bei C, vorausgesetzt, dass die Reibung unberücksichtigt bleibt. Wie verhält sich zu K die Belastung K_0, welche ohne die Stützung in C dieselbe Anstrengung des Stabes verursachen würde?

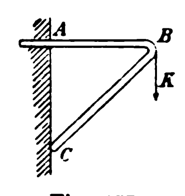


Fig. 177.

Man setze dabei zur Vereinfachung z. B. $AC = AB$.

128. Der rechteckige Rahmen von überall gleichem quadratischen Querschnitt, Fig. 178, werde durch die gleich grossen Kräfte K, K belastet. In welchen Querschnitten findet die grösste Spannung statt, und wie gross ist sie? Welche elastische Form nimmt die Zentrallinie an, insbesondere, wie gross sind die Änderungen des senkrechten und des wagrechten Durchmessers? In welchem Verhältnis stehen diese Grössen? (Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit S. 194.)

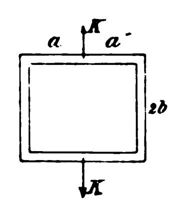


Fig. 178.

9. Der quadratische Rahmen Fig. 179 soll durch Reibung so auf der Welle vom Durchmesser d befestigt werden, dass zwischen beiden Teilen ein Moment M übertragen werden kann. Der Querschnitt des Rahmens sei ein Rechteck von dem Seitenverhältnis $a:b=1:2$, die lichte Weite vor dem Aufpressen soll d_0, die grösste Spannung $\mathfrak{S}$ sein.

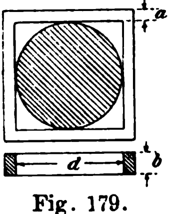


Fig. 179.

Zahlenbeispiel: d = 15 cm, M = 80 kgm, $\mathfrak{S}$ = 1200 kg/cm. Zu berechnen a, b, d_0.

0. Wenn die senkrechten Rahmenstäbe in Fig. 178 so weit wie möglich verkürzt werden, so ergibt sich die Form Fig. 180 der geschlossenen Blattfeder.

Man berechne unter der Annahme $b=0$ die grösste Spannung $\mathfrak{S}$ und die Federung durch die Belastung K, K sowie die elastische Energie, ausgedrückt durch $\mathfrak{S}$, endlich die Dauer der bei stossweiser Belastung entstehenden Schwingungen, wenn der Mittelpunkt der oberen Lamelle fest ist und die Belastung K in einem Gewicht besteht.

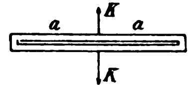


Fig. 180.

1. Man beantworte die Fragen der Aufgabe 128 mit Bezugnahme auf den quadratischen Rahmen Fig. 181 für diagonale Belastung.

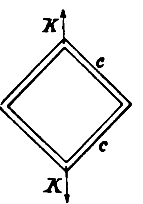


Fig. 181.

2. Durch Anziehen der Schraube A (Fig. 182) soll der Deckel B mit einer Kraft von 1500 kg angedrückt werden. Wie gross ist die hierdurch entstehende grösste Spannung in dem Bügel C, und wo findet sie statt? Um welches Mass muss die Schraube aus der Mutter herausgedreht werden, um den gewünschten Druck zu erreichen? Falls die Querschnitte in der Symmetrieebene und an den Ecken des Bügels verschiedene Anstrengung erfahren, so soll versucht werden, diesen Unterschied dadurch zu beseitigen, dass die Bolzenlöcher am Bügel zwar in 600 mm Entfernung, an dem Rohrstück jedoch im Abstand $600+x$ gebohrt werden. Wie gross wird x?

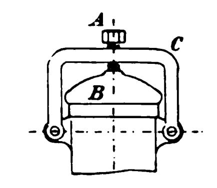


Fig. 182.

133. Der quadratische Rahmen Fig. 183 aus Quadrateisen von 2 cm Querschnittseite und 30 cm mittlerer Rahmenseite rotiert infolge seiner Befestigung auf einer senkrechten Achse mit dieser um seine senkrechte Mittellinie. In welchem Punkte entsteht die grösste Spannung $\mathfrak{S}$, und bei welcher Tourenzahl pro Minute erreicht $\mathfrak{S}$ den zulässigen Wert 800 kg/qcm? Um wieviel vergrössert sich dabei der horizontale Durchmesser?

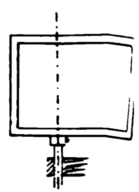


Fig. 183.

134. Das gleichseitige, in den Endpunkten gelenkig befestigte Stabeck Fig. 184 wird in den Ecken durch die Kräfte K_1, K_2, K_3 belastet, welche sich verhalten wie 1 : 2 : 3. Welche Momente entstehen in den Eckquerschnitten? Warum muss sich unter diesen der gefährlichste Querschnitt befinden?

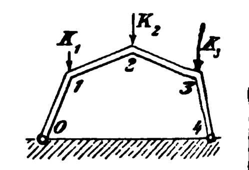


Fig. 184.

Anleitung: Man fixiere ein Koordinatensystem an dem Stabeck in 0, drücke Δx_4 durch K_1, K_2, K_3 sowie durch die statisch bekannte senkrechte und die statisch unbekannte wagerechte Komponente X der Reaktion R_4 aus und setze $\Delta x_4 = 0$. Aus dieser Gleichung kann X berechnet werden.

135. Der bei A und E gelenkig befestigte Stabwinkel Fig. 185 sei in B, C, D durch die gleich grossen Kräfte K belastet. Wie gross ist das grösste Schnittmoment im Stab? Wie verhält sich die Festigkeit der Konstruktion Fig. 185 zu einer im allgemeinen gleichen, bei welcher in C ein Gelenk angebracht wird? Wie verhalten sich die Horizontalkräfte in A und E in beiden Fällen?

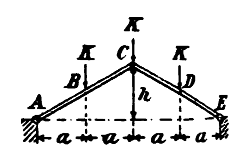


Fig. 185.

Zahlenbeispiel: Welches normale I-Profil ist anzuwenden, wenn $a = 2{,}5$ m, $h = 3$ m, $K = 1200$ kg ist?

136. Welche Reaktionen und Reaktionsmomente entstehen durch die Belastung K in den Befestigungsschnitten 0 und 3 des zweifach fixierten Stabecks Fig. 186? Wie gross sind die Schnittmomente in 1 und 2? Wo ist der gefährlichste Querschnitt?

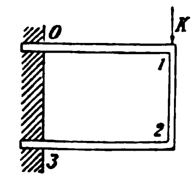


Fig. 186.

137. Der Zapfen einer Welle erfährt nach Ausweis der Rechnung eine elastische Neigung von 1 Bogenminute. Um zu verhüten, dass hierdurch eine un-

gleichmässige Verteilung des Druckes über die Länge des Zapfens entsteht, soll das Lager durch einen Lagerstuhl von der Form Fig. 187 unterstützt werden, dessen Länge 1200 mm ist. Wie gross muss d sein, damit unter dem Drucke $K = 10\,000$ kg die Stützfläche sich ebenfalls um 1 Minute neigt? Von der Elastizität der Grundplatte und der Stützplatte mag dabei abgesehen werden.

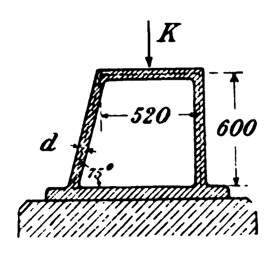


Fig. 187.

8. Welche Richtung muss die Kraft K (Fig. 188) haben, damit die kleine elastische Bewegung des Punktes 2 ein Element einer senkrechten Geraden ist?

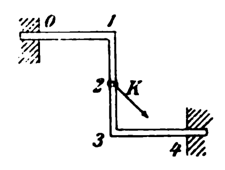
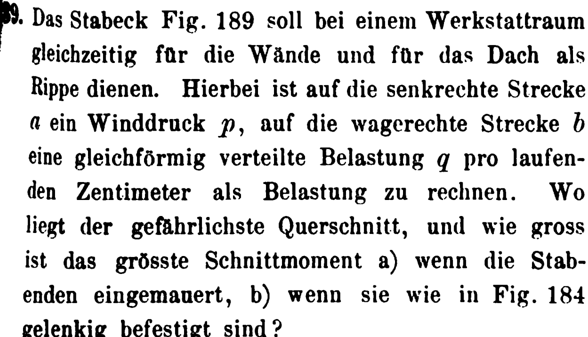
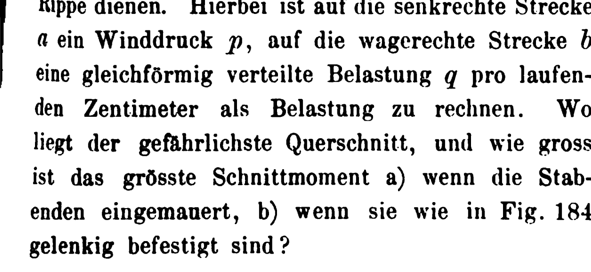


Fig. 188.

9. Das Stabeck Fig. 189 soll bei einem Werkstattraum gleichzeitig für die Wände und für das Dach als Rippe dienen. Hierbei ist auf die senkrechte Strecke a ein Winddruck p, auf die wagerechte Strecke b eine gleichförmig verteilte Belastung q pro laufenden Zentimeter als Belastung zu rechnen. Wo liegt der gefährlichste Querschnitt, und wie gross ist das grösste Schnittmoment a) wenn die Stabenden eingemauert, b) wenn sie wie in Fig. 184 gelenkig befestigt sind?

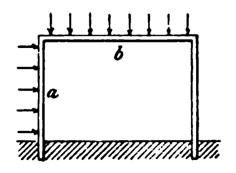
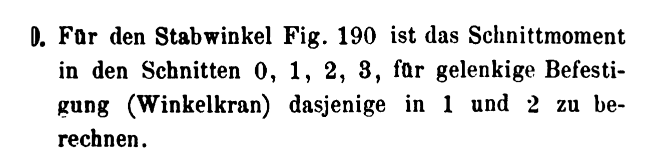


Fig. 189.

0. Für den Stabwinkel Fig. 190 ist das Schnittmoment in den Schnitten 0, 1, 2, 3, für gelenkige Befestigung (Winkelkran) dasjenige in 1 und 2 zu berechnen.

Zahlenbeispiel: $a = 4$ m, $b = 5$ m, $d = 2{,}5$ m, $K = 2000$ kg.



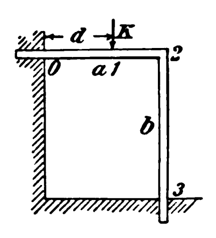


Fig. 190.

1. Für das Konsol Fig. 191 ist mit der Annäherung durch ein Dreieck aus den Seiten a, b, c das Schnittmoment im gefährlichsten Querschnitt zu berechnen.

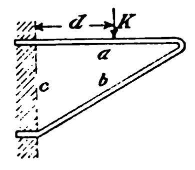


Fig. 191.

142. Der rechteckige Rahmen Fig. 192 ist bei 0 und 1 gelenkig befestigt, bei 3 durch eine senkrechte Kraft K belastet. Man berechne die Schnittmomente in den Querschnitten 0, 1, 2, 3 unter der Annahme überall gleicher Querschnitte.

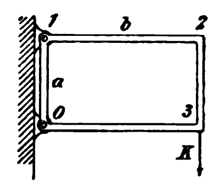


Fig. 192.

143. Das Stabeck Fig. 193 ist durch die bei 1 und 5 gelenkig befestigte Spannstange verstärkt. Man ermittle die Schnittmomente in den Schnitten 0 bis 6.

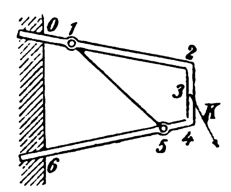


Fig. 193.

Anleitung: Fixiert man ein Koordinatensystem in 0, so erhält man zunächst, wie bei den früheren Aufgaben die Gleichungen $\Delta x_6 = 0$, $\Delta y_6 = 0$, $\beta_6 = 0$. Bezeichnet man ferner die Wegkomponenten der Punkte 1 und 5 nach der Richtung 1 5 mit Δu_1 und Δu_5, so ist, wenn die Dehnbarkeit der Stange 1 5 vernachlässigt wird, $\Delta u_1 = \Delta u_5$. Die vier Gleichungen genügen zur Bestimmung von den drei statischen Unbekannten bei 6 und der unbekannten Spannung U in 1 5.

144. Der Rahmen Fig. 194 sei durch zwei gleiche Kräfte K, K belastet. Wo ist das biegende Moment am grössten und wie gross ist dasselbe?

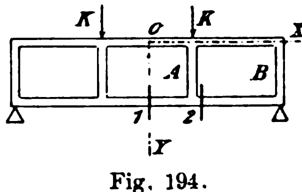


Fig. 194.

Anleitung: Man fixiere das Koordinatensystem bei 0, denke Schnitte gelegt bei 1 und 2 und führe die Unbekannten X_1, M_1, X_2, Y_2, M_2 ein, für welche sich 5 Deformationsgleichungen ergeben, nämlich zunächst $\Delta x_1 = 0$, $\beta_1 = 0$. Drei weitere Gleichungen erhält man, indem man Δx_2, Δy_2, β_2 einmal auf dem Weg über A, das anderemal auf dem Weg über B ausdrückt und beide einander gleichsetzt.

145. Der Rahmen Fig. 195, unter welchem man sich etwa einen Wagebalken oder einen Balancier in besonderer Gestalt vorstellen kann, befinde sich unter der Wirkung der Kräfte K_1, K_2, K_3 im Gleichgewicht. Man berechne die Schnittmomente für die Ecken und zeichne ein Diagramm für die Variation der Momente in den sämtlichen Stäben. Die Rechnung kann mit selbstgewählten Buchstaben oder Zahlen durchgeführt werden.

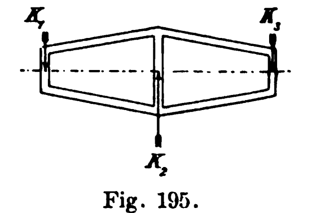


Fig. 195.

Fünfte Aufgabengruppe.

Aufgaben über Biegung gekrümmter Stäbe von relativ geringer Dicke.

---

146. Der nach der Form eines Kreisquadranten gebogene Stab AE (Fig. 196) wird in E durch die Kräfte K_x und K_y und das Moment M auf Biegung beansprucht. Man berechne für den Angriffspunkt E die Verschiebungen Δx und Δy sowie den Biegungswinkel β.

Welche Beziehungen müssen zwischen K_x, K_y, M bestehen, damit sämtliche elastischen Wirkungen in E Null werden, wenn $M \neq 0$ ist? Wo liegt in diesem Falle der gefährlichste Querschnitt, und wie gross ist daselbst das Schnittmoment?

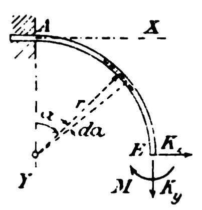


Fig. 196.

147. Man ermittle die elastischen Wirkungen Δx, Δy, β für die Mittelpunkte der Kugeln EE (Fig. 197) infolge ihrer Schwere und der Zentrifugalkraft, welche entsteht, wenn die senkrechte Welle n Umdrehungen per Minute macht, unter der Voraussetzung, dass die Zentrallinie der elastischen Arme im unbelasteten Zustand ein Viertelkreis vom Radius r ist, das Gewicht der Arme vernachlässigt werden kann und die Formänderungen nur gering sind.

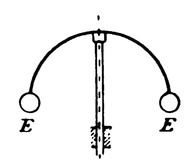


Fig. 197.

148. Der Punkt E des Quadrantstabes AE (Fig. 198) sei durch die in D und E gelenkig befestigte Strebe DE gestützt, durch die senkrechte Kraft K belastet. Wie gross ist die in der Strebe entstehende Kraft, wie gross die Senkung von E? Wo ist der gefährlichste Querschnitt, und wie gross ist das Moment daselbst?

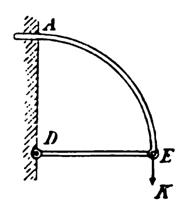


Fig. 198.

149. Welche elastischen Wirkungen entstehen in E (Fig. 199) durch die Kraft K mit dem Angriffspunkt C, und wie gross sind die elastischen Wirkungen in C, wenn K nach E verlegt wird?

Welche Kurven beschreibt C, wenn E auf einem kleinen Kreise geführt wird und umgekehrt?

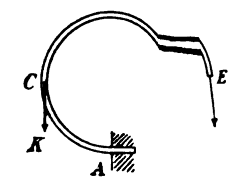


Fig. 199.

150. Die Rolle E (Fig. 200) berührt im unbelasteten Zustand des halbkreisförmigen Stabes eine senkrechte Wand ohne Druck. Wie gross ist der Druck zwischen Rolle und Wand, welcher durch die Kraft K hervorgebracht wird?

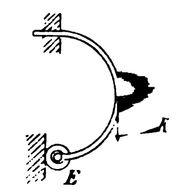


Fig. 200.

151. Die Rolle E (Fig. 201) berührt im unbelasteten Zustand des halbkreisförmigen Stabes eine wagerechte Wand ohne Druck. Wie gross ist der Druck zwischen Rolle und Wand, welcher durch die Kraft K hervorgebracht wird?

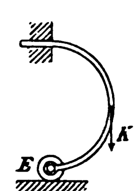


Fig. 201.

152. Die halbkreisförmige Feder AE (Fig. 202) ist in dem starren Arm CE unbeweglich befestigt, welcher selbst bei C um einen Gelenkzapfen drehbar ist.

Wie gross ist der durch die Belastung K hervorgebrachte Druck R auf den Zapfen C, und wie ist derselbe gerichtet, vorausgesetzt, dass für $K = 0$ auch $R = 0$ ist?

Für welche Grösse und Richtung von l bleibt $R = 0$ für $K \neq 0$?

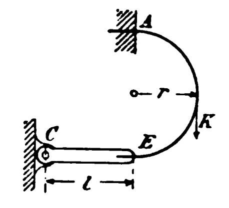


Fig. 202.

Anmerkung: Im letzteren Falle ist C das Momentanzentrum des Stabelements bei E für den freien elastischen Halbkreis unter der Belastung K.

153. Ein kreisförmig gebogener Drahtring (Fig. 203), dessen Enden sich druckfrei berühren, soll durch Einzwängen eines Drahtes von gleicher Dicke geöffnet werden. Wie gross muss das Verhältnis $r : d$ wenigstens sein, wenn hierbei die Elastizitätsgrenze σ nicht überschritten werden soll?

Zahlenbeispiel: Wie gross ist r, wenn $d = 8$ mm, $\sigma = 2200$ kg/qcm, $E = 2000000$ kg/qcm ist.

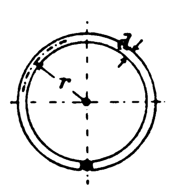


Fig. 203.

Wie gross wird r für das Zahlenbeispiel der Aufgabe 153, wenn die Öffnung des Ringes nicht durch Einzwängen eines Drahtes, sondern durch zwei an den Enden des Ringes angreifende Kräftepaare bewirkt wird?

Für die Feder (Fig. 204), welche aus einem kreisförmigen Teil und zwei geradlinigen Ansätzen besteht, deren Länge gleich dem Kreisdurchmesser $2r$ ist, berechne man die durch die Kräfte K hervorgebrachte Öffnung bei C und bei E.

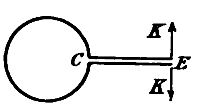


Fig. 204.

6. Wird ein Draht um den Dorn i (Fig. 205) in die Form einer Schraubenfeder gewickelt, so hat diese nach Beendigung der Arbeit nicht den lichten Durchmesser i, sondern einen wesentlich grösseren a. Welche Beziehung wird zwischen i, a und d stattfinden, wenn $\sigma_c = 2200$ kg/qcm, $E = 2\,000\,000$ kg/qcm ist?

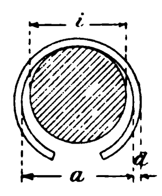


Fig. 205.

57. Der halbkreisförmige Stab AE (Fig. 206) ist mit Gelenkbolzen befestigt, welche im unbelasteten Zustand druckfrei sind. Wie gross sind die Kräfte R und Q, welche in den Gelenken A und E durch die Kraft K hervorgerufen werden, und wie sind sie gerichtet?

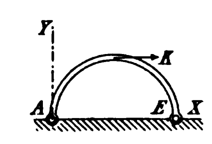


Fig. 206.

Anleitung: Aus der Gleichung der statischen Momente inbezug auf A erhält man die statisch bestimmte Komponente Q_y, während die statisch unbestimmte Q_x aus der Gleichung für die elastische Wirkung in E, nämlich $\Delta x = 0$, hervorgeht. Danach sind auch die Komponenten R_x, R_y leicht zu finden.

3. Die in Fig. 207 dargestellte Form des Stabes AE entspreche dem spannungslosen Zustand. Der Stab besteht aus einem Kreisquadranten vom Halbmesser r und zwei geraden Teilen von der Länge r. Man ermittle Grösse und Richtung der Gelenkdrucke in A und E, welche durch die Belastung K hervorgerufen werden.

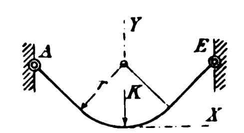


Fig. 207.

1. Welche Spannungen und Deformationen entstehen in dem bei A und E eingeklemmten Halbring Fig. 208 infolge der Belastung K?

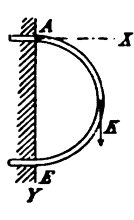


Fig. 208.

Anleitung: Man führe die Schnittkräfte S, T und das Schnittmoment M im Schnitt bei E als Unbekannte ein und berechne sie aus den Deformationsgleichungen für Δx, Δy und β in E, welche sämtlich Null sind. Hierzu kann auch die Castiglianosche Methode verwendet werden, wie bei den meisten Aufgaben dieser Gruppe.

160. Ein Stabquadrant AE (Fig. 209) von dem mittleren Radius r und der Dicke d sei an beiden Enden in einem starren Körper eingeklemmt, welcher kalt bleibt, während der Stab vom spannungslosen Zustand bei 0^0 beginnend um t^0 erwärmt wird. Welche Spannungen und Deformationen entstehen hierdurch in dem Stab, wenn α der Koeffizient der Wärmedehnung ist?

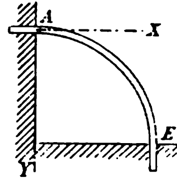


Fig. 209.

Zahlenbeispiel: $r = 500$ mm, $d = 30$ mm, $\frac{1}{\alpha} = 80\,000$, $E = 2\,000\,000$kg/qcm, $t = 350^0$.

Anleitung: Man berechne für den Schnitt E die durch die Wärme und durch die daselbst entstehenden unbekannten Klemmkräfte S, T und durch das Moment M bewirkten Bewegungen Δx, Δy, β, setze sie Null und berechne aus den drei Gleichungen S, T, M.

161. Man ermittle die statisch unbestimmten Kräfte, bezw. das Moment für die in verschiedenem Grade geschlossenen Ringe (Figg. 210, 211, 212). Mit

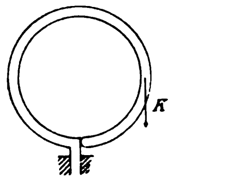


Fig. 210.

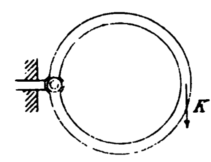


Fig. 211.

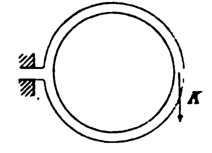


Fig. 212.

welchem Recht kann man Fig. 210 als $^1/_3$ geschlossen, Fig. 211 als $^2/_3$ geschlossen, Fig. 212 als $^3/_3$ geschlossen bezeichnen?

162. Man ermittle für den Ring Fig. 213 den Spannungszustand und die Vergrösserung des Durchmessers AE infolge der Kräfte KK.

Zahlenbeispiel: Der Ring bestehe aus Flacheisen von der radialen Dicke d und der Breite $b = 4$d. Er diene als Spannring einer Dachkonstruktion für Schrauben von 20 mm Durchmesser. Der mittlere Ringhalbmesser sei 80 mm. Berechne b und d so, dass die Spannung im Ring nicht grösser wird als im Schraubenkern.

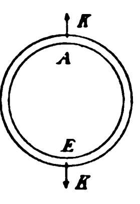
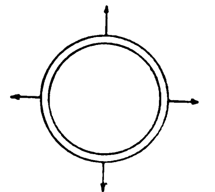


Fig. 213.

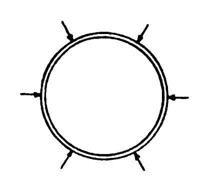
3. Welche Dimensionen erhält der Ringquerschnitt nach dem Zahlenbeispiel der Aufgabe 162, wenn 4 Spannschrauben von gleicher Spannkraft vorhanden sind? (Fig. 214).


Fig. 214.

4. Man ermittle das grösste Schnittmoment

a) für einen nach Fig. 21 durch 6 gleiche und regelmässig verteilte Kräfte beanspruchten Ring,

b) für n solche Kräfte.


Fig. 215.

5. Wie gross ist die Zunahme der Entfernung AE, welche bei dem gekrümmten Stab Fig. 216 durch die Kräfte K hervorgebracht wird? Wie gross würde, wenn der Stab bei A mittels einer Verlängerung festgeklemmt wäre, die Seitenverschiebung von E?

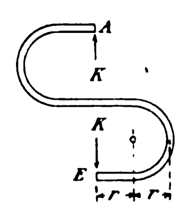


Fig. 216.

6. Die in Fig. 217 dargestellte Feder einer Dohmen-Leblancschen Kupplung wird durch die Kräfte K belastet. Bei welchem Wert K wird die grösste zulässige Spannung 4000 kg/qcm erreicht? Welche Verkürzung erfährt die Feder bei dieser Belastung?

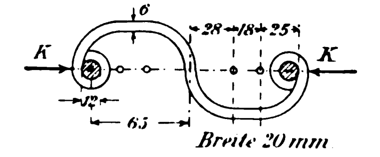


Fig. 217.

7. Wie gross sind Senkung, Seitenverschiebung und Biegungswinkel von E infolge der Belastung K, wenn die Feder Fig. 218 bei A eingeklemmt ist?

Welche allgemeine Bedingung ist zu erfüllen, damit der in E endigende gerade Teil des Stabes parallel und in einer senkrechten Geraden geführt wird?

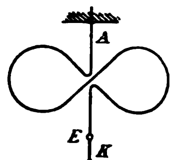
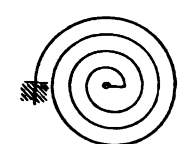


Fig. 218.

168. Die in Fig. 219 im ungespannten Zustand dargestellte Feder, welche die Form einer archimedischen Spirale hat, werde durch Drehen der fest gelagerten mittleren Achse um 180^0 gespannt. Wie gross ist das hierzu erforderliche Moment? Welche Grösse und Richtung hat der zwischen der Achse und ihren Lagern entstehende Druck?


Fig. 219.

169. Man ermittle für die geschlossene Feder Fig. 220 die statisch unbestimmten Momente in den Schnitten bei D und die Lage der Linie, in welcher die Schnittkraft daselbst wirken müsste, um die Einwirkung der unteren Federhälfte auf die obere vollständig zu ersetzen.

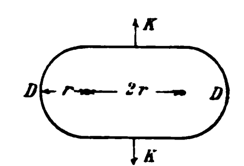
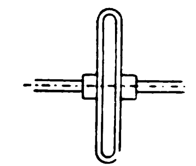


Fig. 220.

170. Das elastische Maschinenelement Fig. 221 ist aus Stahlguss so zu berechnen, dass bei einer Stangenkraft von $K = 6000$ kg die grösste Spannung $\mathfrak{S} = 800$ kg/qcm und die Federung 1 mm beträgt.


Fig. 221.

171. Die aus zwei elastischen, in E gelenkig verbundenen Quadrantstäben bestehende Feder Fig. 222 hat die Eigenschaft, dass die elastischen Bewegungen des Punktes E durch die Kraft K in deren Richtung verlaufen. Man prüfe diese Behauptung zunächst für den dargestellten besonderen Fall und suche das allgemeine Gesetz, nach welchem diese Aufgabe noch durch anders geformte Federn gelöst werden kann.

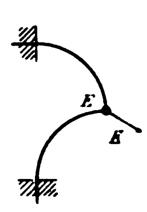


Fig. 222.

172. Wie gross ist der Druck R im Gelenk C Fig. 223, welcher durch die Kräfte KK hervorgerufen wird, wenn für $K = 0$ auch $R = 0$ ist, und wenn die am Gelenk befindlichen Teile vollkommen starr sind?

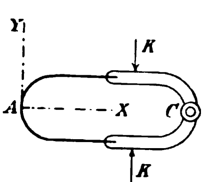


Fig. 223.

Anleitung: In dem bei A an der Feder fixierten Koordinatensystem ist für den Punkt C $\Delta y = 0$. Hieraus lässt sich R berechnen.

Der Bogenträger Fig. 224, welcher sich mit Kämpfergelenken auf die Widerlager stützt, sei in 5 gleich weit von einander und von den Gelenken entfernten Punkten mit je 1500 kg belastet. Welches I-Normalprofil ist für den Bogen erforderlich, wenn die Spannung im gefährlichsten Querschnitt nicht grösser werden soll als $\mathfrak{S} = 800$ kg/qcm?

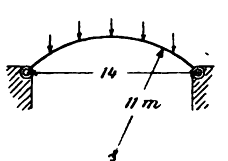


Fig. 224.

Für die kranartigen Bogenträger Fig. 225 und Fig. 226 sind die gefährlichsten Querschnitte und die Schnittmomente daselbst zu ermitteln. Fig. 225 ist aus einem geraden und einem viertelkreisförmigen Stab, Fig. 226 aus Quadranten eines Kreises und einer Ellipse zusammengesetzt.

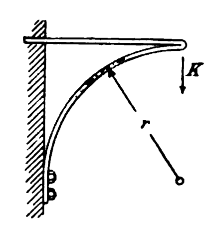


Fig. 225.

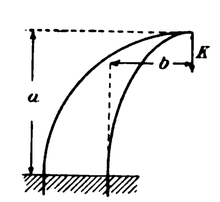


Fig. 226.

Zwei gusseiserne Quadrantstäbe I und II sollen nach Fig. 227 durch Gelenke verbunden werden. Beim Zusammensetzen stellt sich heraus, dass beim Teil II die Achsenentfernung der Bolzenlöcher bei C und D um ein Geringes (f mm) falsch gebohrt ist. Wenn trotzdem die Zusammensetzung mit genau passenden Gelenkbolzen erzwungen wird, wie gross ist die in beiden Teilen entstehende Spannung?

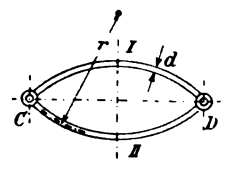


Fig. 227.

Zahlenbeispiel: $r = 600$ mm, d $= 50$ mm, $f = 2$ mm, $E = 1\,000\,000$ kg/qcm.

Die halbkreisförmigen Stäbe I und II (Fig. 228), welche in C und D durch Gelenke verbunden sind, haben verschiedene Querschnitte, deren Trägheitsmomente J_1 bezw. J_2 sind. Welche Richtungen erhalten die

durch die Belastungen KK in C und D entstehenden Zapfendrücke, und in welchem Verhältnis stehen die grössten in I und in II auftretenden Biegungsmomente?

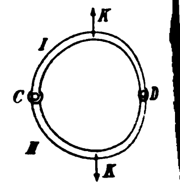


Fig. 228.

177. Auf das in Fig. 229 dargestellte Rad, dessen Kranz und dessen Arme aus Flacheisen von gleichem Querschnitt bestehen, werde durch die Achse die senkrechte Kraft K übertragen. Man untersuche den Spannungs- und den Deformationszustand in den einzelnen Teilen des Rades in der dargestellten und in einer um 90^0 veränderten Lage.

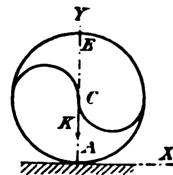


Fig. 229.

Anleitung: Man lege die Schnitte bei C und bei E und führe in jedem die Schnittkomponenten S und T sowie das Schnittmoment M als Unbekannte ein. Zur Berechnung der 6 Unbekannten S_c, T_c, M_c, S_e, T_e, M_e, dienen 6 Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Werte Δx, Δy, β für C und E über die linke Radhälfte gerechnet denselben Wert ergeben wie über die rechte.

178. Der Spannungs- und Deformationszustand des Rades Fig. 230 ist unter der Annahme zu untersuchen, dass die Arme und der Kranz den gleichen Querschnitt haben.

Anleitung: Man lege, wie in Fig. 231 angedeutet, den Schnitt bei E durch den Kranz und vier Schnitte durch die Arme an der Nabe, von denen jedoch der Symmetrie wegen nur zwei nicht gegen die Lotlinie symmetrische z. B. C und D gebraucht werden. Der Symmetrie wegen ist $T_e = 0$. Es bleiben sonach die 8 Unbekannten S_c,

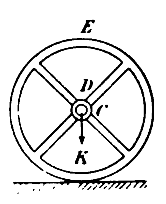


Fig. 230.

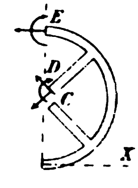


Fig. 231.

T_c, M_c, S_d, T_d, M_d, S_e, M_e zu bestimmen. Hierzu dienen die 7 Gleichungen: $\Delta x_c = 0$, $\Delta x_d = 0$, $\Delta y_c = \Delta y_d$, $\beta_c = 0$, $\beta_d = 0$, $\Delta x_e = 0$, $\beta_e = 0$ sowie eine achte Gleichung, welche ausdrückt, dass die Vertikalkomponenten der Schnittkräfte und der äusseren Kräfte die Summe Null ergeben.

Der gebogene Stab Fig. 232 habe die Form eines Halbkreises im vollständig unbelasteten, auch durch das Eigengewicht nicht beeinflussten Zustand. Wie gross sind die elastischen Wirkungen Δx, Δy, β in E, welche durch das Eigengewicht hervorgebracht werden?

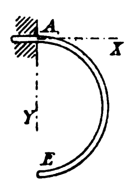


Fig. 232.

Ein gusseiserner Hohlzylinder sei stehend gegossen und ausgebohrt worden. Um wieviel vermindert sich der senkrechte und um wieviel vergrössert sich der wagerechte Durchmesser, wenn der Zylinder nach Fig. 233 auf eine ebene Unterlage gelegt wird?

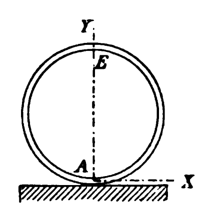


Fig. 233.

Zahlenbeispiel: $r = 80$ cm, $d = 4$ cm, $E = 950\,000$ kg/qcm.

Anleitung: Man lege einen Schnitt bei E und führe die Schnittkraft S_e und das Schnittmoment M_e als Unbekannte ein. Zur Berechnung dienen die Gleichungen $\Delta x_e = 0$, $\beta_e = 0$.

Ein Stahlgussring von der Form Fig. 234 sei nur durch sein Eigengewicht belastet. Man suche das Moment im gefährlichsten Querschnitt in seiner Abhängigkeit von den Koordinaten a und b der Stützpunkte auszudrücken, indem man diese als veränderlich betrachtet. (Nach Julius Schenk, Festigkeitsberechnung grösserer Drehstrommaschinen. Leipzig, Teubner 1903.)

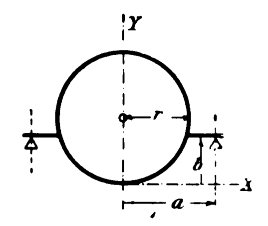


Fig. 234.

Der elastische Ring, Fig. 235, rotiert mit n Touren pro Minute um seinen senkrechten Durchmesser. Man berechne die hierbei stattfindende Veränderung des senkrechten und des wagerechten Durchmessers sowie Ort und Grösse des grössten Schnittmoments.

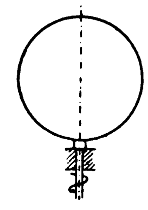


Fig. 235.

Der Doppelring Fig. 236 (Kolbenring) sei einem von aussen wirkenden Druck p kg/cm ausgesetzt. Welche Form nimmt der äussere Ring an, wenn sich die Fuge hierdurch schliesst, ohne dass daselbst ein Druck entsteht?

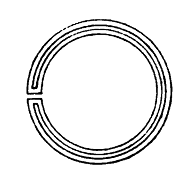
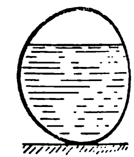


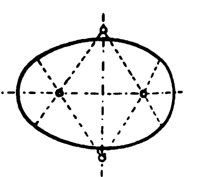
Fig. 236.

184. Man untersuche die Biegungsbeanspruchung, welche ein kreiszylindrisches Blechgefäss bei teilweiser Füllung mit Wasser erfährt, wenn die Festigkeit der Böden ausser acht gelassen wird, und wenn es, wie in Fig. 237, auf einer Ebene ruht.


Fig. 237.

185. Man untersuche die Biegungsbeanspruchung eines Rohres von elliptischem Querschnitt durch inneren oder äusseren überall gleichen Flächendruck.

Anleitung: Man ersetze die Ellipse durch Kreisbögen (s. Fig. 238), deren analytische Behandlung mit trigonometrischen Funktionen möglich ist.


Fig. 238.

186. Eine Lagerschale, Fig. 239, welche die Hälfte des Zapfens umfasst und nur in der Mitte unterstützt ist, soll so ausgeführt werden, dass überall gleicher Flächendruck stattfindet. Dabei soll die Berührungsfläche nach dem Radius r_0 ausgedreht werden, während r_1 der Radius des Zapfens ist. Welche Form erhält die Lagerschale im Querschnitt, wenn P der Zapfendruck ist?

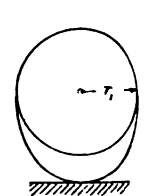


Fig. 239.

187. Welche Form erhält die Lagerschale unter den Voraussetzungen der vorigen Aufgabe, wenn der umspannte Winkel der Lagerschale 90° ist und zwar nach Fig. 240, wenn die Schale in der Mitte gestützt ist oder nach Fig. 241, wenn sie in zwei Punkten gestützt ist.

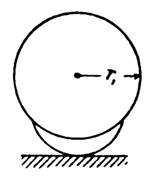


Fig. 240.

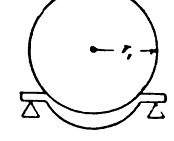
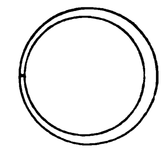


Fig. 241.

188. Ein elastischer Ring (Kolbenring) soll nach Fig. 242 so gestaltet werden, dass er, im ungespannten Zustand mit klaffender Fuge abgedreht, nach dem Einsetzen in den Zylinder bei geschlossener Fuge die Zylinderwand mit überall gleichem Flächendruck berührt. Welche Form ist der inneren Grenzlinie zu geben?


Fig. 242.

189. Ein Schwungrad von der Gestalt Fig. 243 rotiert gleichmässig mit n Touren pro Minute. Man ermittle den infolge der Zentrifugalkraft ent-

n Spannungszustand, insbesondere die gröss-
Kranz entstehenden Schnittmomente.

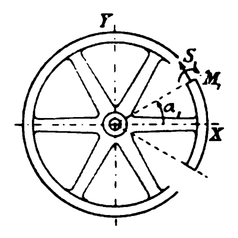


Fig. 243.

leitung: Die elastische Linie des Kranzes
hl zur Armmittellinie, wie zur Mittellinie
winkels symmetrisch. Daher wird für den
ach letzterer $\Delta y_1 : \Delta x_1 = \tan g \alpha_1$, $\beta_1 = 0$.
Heichungen genügen zur Berechnung der
raft S_1 und des Schnittmomentes M_1.
der Berechnung von Δx_1 und Δy_1 kommt
lie Dehnung der Zentrallinie des Armes durch seine eigene Zentri-
ft (vergl. Aufg. 66), durch die Zentrifugalkraft des Kranz-Sextanten
Schnittkräfte S_1 als auch die Deformation des Kranzes durch die
elastischen Element wirkende Schnittkraft S (s. § 74) und das Mo-
in Betracht, während die Transversalkräfte T, die in der Figur
ernachlässigt werden können. Bei besonders grosser radialer Kranz-
auf § 114 Rücksicht zu nehmen.

Aufgabe findet sich vollständig durchgeführt in Grashof, Theorie
stizität und Festigkeit S. 278. Ihr Ziel, die Vermeidung von
radexplosionen, gewinnt mit der fortschreitenden Steigerung der
ndigkeit immer grössere Bedeutung.

Sechste Aufgabengruppe.

Torsion gerader und gekrümmter Stäbe.

190. Die Arbeitsleistung einer Turbine (N Pferd) soll durch eine Flusseisen-Welle von n Touren pro Minute, einer Fabrik zugeführt werden. Welchen Durchmesser erhält die l m lange Welle, die nur auf Torsion beansprucht ist, wenn die grösste Zerrung (s. § 86) nicht grösser werden soll als 800 kg/qcm? Wie gross ist die Verdrehung zwischen Anfangs- und Endquerschnitt? Wie gross ist die von der Welle aufgenommene elastische Energie?

Zahlenbeispiel: $N = 250$, $n = 180$, $l = 60$ m. $E = 2000000$ kg/qcm.

191. Auf einer schmiedeisernen Welle von 20 cm Durchmesser ist ein Schwungrad festgekeilt, dessen Gewicht $G = 1000$ kg und dessen Trägheitsradius $i = 100$ cm ist. In 7 m Entfernung befindet sich ein zweites gleich grosses Schwungrad, welches mit $n = 50$ Umdrehungen pro Minute lose auf der zunächst ruhenden Welle rotiert, jedoch durch eine Klauenkuppelung mit der Welle verbunden werden kann. Wie gross ist die Anstrengung der Welle, wenn diese Einrückung momentan erfolgt? Wie gross ist die Dauer der entstehenden Schwingungen beider Räder?

192. Die Wellen I und II (Fig. 244) haben 80 mm Durchmesser. I bewegt sich, von einem Motor angetrieben, mit gleichbleibender Geschwindigkeit, während II diejenige ungleichmässige Geschwindigkeit empfängt, die sich aus der Verbindung beider Wellen durch elliptische Zahnräder ergibt, deren Achsen sich verhalten wie 3 : 4. Auf der Welle II ist festgekeilt ein Schwungrad vom Trägheitsradius $i = 0{,}8$ m und dem

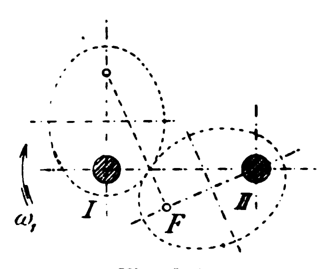


Fig. 244.

Gewicht $G = 120$ kg. Wie gross darf der Sekundenwinkel ω_1 (Winkelgeschwindigkeit der Welle I in 1 Sekunde, gemessen in Bogenmass) sein, wenn die durch den Trägheitswiderstand allein bedingte grösste Zerrung in einer der beiden Wellen das zulässige Mass $E\varepsilon = 800$ kg/qcm nicht überschreiten soll?

Anleitung: Man zeichne mit offenem Massstab den Hodograph (Geschwindigkeitsriss) von F sowie hierzu den Beschleunigungsriss und finde so die grösste Beschleunigung ω_2' als $F(\omega_1)$ u. s. w.

3. Auf der Kurbelwelle (Fig. 245) einer Dampfmaschine sitzen zu beiden Seiten der Kröpfung die Räder I und II, deren Trägheitsmomente J_1 und J_2 sind. Das Rad II dient als Riemscheibe und empfängt durch den Riemen das konstante Belastungsmoment M_b. Wie gross sind die Torsionsmomente in der rechten und der linken Wellenhälfte, wenn auf die Kurbel das Kraftmoment M_k wirkt?

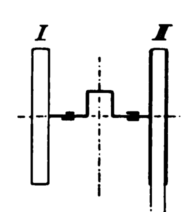


Fig. 245.

4. Für einen auf Torsion beanspruchten Stab von rechteckigem Querschnitt (Fig. 246) bedeute τ_b die aus Gleichung (283) folgende grösste Schubspannung, während mit τ' die grösste Schubspannung bezeichnet werden mag, die aus der älteren Theorie hervorgeht (s. Anm. 1 S. 102), nämlich $\tau' = \frac{M_x}{J_x}\sqrt{b^2 + c^2}$, unter J_x das polare Trägheitsmoment des Querschnitts verstanden. Man berechne $\frac{\tau'}{\tau}$ für die Verhältnisse $\frac{b}{c} = 1,\ 1{,}5,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10$.

Fig. 246.

5. Ein Schmiedeisenstab von dem Querschnitt Fig. 246 ($2b = 2$ cm, $2c = 1$ cm) wurde an beiden Enden durch entgegengesetzt drehende Kräftepaare $M_x = 250$ kgcm auf Torsion belastet. Dabei wurde beobachtet, dass sich zwei materielle Querschnitte von 40 cm Abstand gegenseitig um den in Bogenmass ausgedrückten Winkel $\vartheta = 0{,}000652$ verdrehten, während durch einen anderen Versuch $E = 2106000$ kg/qcm ermittelt war.

Wie gross ist G (§ 38) für $m = {}^{10}/_3$? Wie gross ist D (§ 84)? Wie gross wird der Zahlenfaktor für eine der drei ersten Gleichungen (302), wenn man sie auf den Versuch anwendet?

196. Die Schraubenfeder AE (Fig. 247), welche mit dem Rahmen um die senkrechte Achse Z rotieren kann, soll, wenn der Rahmen in Ruhe ist, mit einer solchen Spannkraft K_0 eingesetzt werden, dass bei einer gewissen Tourenzahl n_1 die Kraft, mit welcher die Feder bei A und E auf den Rahmen wirkt, einen gegebenen kleineren Wert K_1 hat.

Welche Bedingungen ergeben sich hiernach für die Form und Grösse der Feder, und wie gross ist die Spannkraft der Feder in dem Mittelschnitt durch die Z-Achse für $n = n_1$?

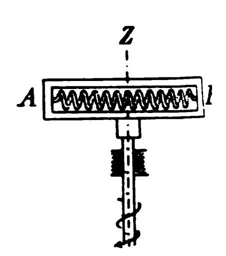


Fig. 247.

197. Ein nach der archimedischen Spirale mit n ganzen Windungen gebogener Stab (Fig. 248) sei bei A fixiert, bei E durch eine zur Windungsebene normale Kraft K im Mittelpunkte der Spirale belastet. Wie gross ist K, die Federung und das Arbeitsvermögen der Feder für $E = 2200000$ kg/qcm und $\tau_{max} = 3000$ kg/qcm?

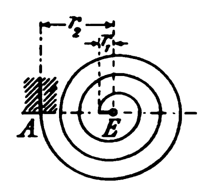


Fig. 248.

Zahlenbeispiel 1: $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 19$ cm, $n = 3$, Stabqu schnitt Kreis von 2,5 cm Durchmesser.

Zahlenbeispiel 2: $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 8{,}5$ cm, $n = 5$. Stabqu schnitt Rechteck von 1 cm Breite und 14 cm Höhe.

Anleitung: Setze näherungsweise $ds = r d\alpha$.

198. Die Feder Fig. 248 sei in der Mitte bei E fixiert und am äusseren Ende bei A durch eine nach der Achse gerichtete Kraft K belastet. Wie beantworten sich in diesem Falle die Fragen der Aufgabe 198?

Anmerkung: Die hier vorausgesetzte Anordnung liegt näherungsweise bei den schneckenförmig gewickelten Pufferfedern der Eisenbahnwagen vor, wenn das innere Federende die Pufferstange genau passend umschliesst.

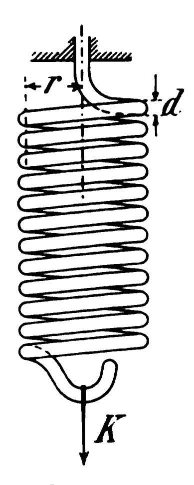


Fig. 249.

199. Eine schraubenförmig gewickelte Feder (Fig. 249) aus gehärtetem Stahldraht, deren mittlerer Windungsdurchmesser $2r$ das achtfache der Drahtdicke d ist, soll maximal durch $K = 40$ kg belastet werden.

Wie gross ist die Drahtdicke zu nehmen, wenn die grösste Schubspannung $\tau = 3000$ kg/qcm betragen soll? Wieviel Windungen sind erforderlich, wenn der Belastungszunahme von 20 kg bis 40 kg eine Federung von 5 cm entsprechen soll? $G = 780000$ kg/qcm. (Vergl. Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1891, S. 1397.)

Wie gross ist die Dauer einer ganzen Schwingung der Feder bei einer Gewichtsbelastung von 30 kg a) ohne Rücksicht, b) mit Rücksicht auf das Eigengewicht der Feder?

Anmerkung: Warum ist die Dehnung der Belastung nicht proportional, falls die Windungen der Feder sich unter Druck berühren?

0. Wie gross ist die grösste Schubspannung, welche in einem Stab von dem Querschnitt Fig. 92 entsteht, wenn derselbe durch ein Kräftepaar von dem Moment M_x auf Torsion beansprucht wird?

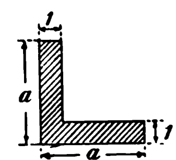


Fig. 92.

Siebente Aufgabengruppe.

Gemischte Beanspruchung stabförmiger Körper.

201. Zum Verschluss eines Dampfkochers dienten 20 Bügelschrauben (Fig. 250) von 20 mm äusserem und 16,4 mm Kerndurchmesser. Man hatte dieselben unter der Annahme achsialer Belastung mit $-\sigma = 300$ kg/qcm berechnet. Wie erklärt es sich, dass bei dem normalen Dampfdruck die Schrauben brachen und der Deckel fortgeschleudert wurde, was den Tod eines Menschen zur Folge hatte.

Man versuche den Bügel durch einen anders geformten zu ersetzen, bei welchem die Schrauben günstiger beansprucht werden.

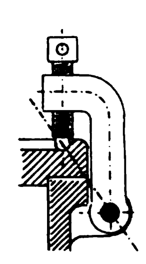


Fig. 250.

202. Die in Fig. 251 im Schnitt dargestellte Kalander-Walze aus Martinstahl (von Schürmann in Düsseldorf) dient zur Ausübung eines gleichmässig über die ganze Länge verteilten Druckes von 60 000 kg.

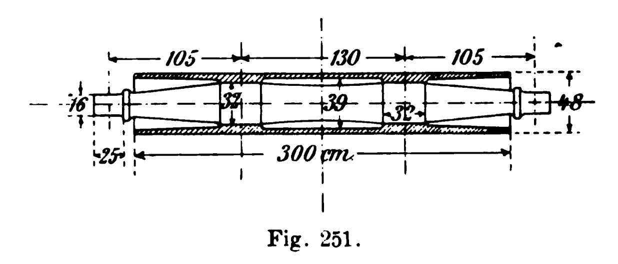


Fig. 251.

Wie gross sind die grössten Spannungen in den gefährlichsten Querschnitten der Welle und der Hohlwalze, und welche Deformationen sind bei Ausübung des vollen Druckes zu erwarten?

Anmerkung: Man berücksichtige nicht nur die achsial gerichteten, sondern auch die Kreisspannungen. (Problem.)

Unter einem **Verbundstab** werde ein Stab verstanden, der aus mehreren neben einander gelegten Stäben von verschiedenem Material zusammengesetzt ist, die so fest an einander haften, dass sie sich nicht gegenseitig verschieben können, dass also auch für Biegung die Bernoullische Hypothese (§ 50) gerechtfertigt erscheint. Ein Verbundstab kann z. B. aus Holzstäben und Eisenstäben, oder aus Gusseisen und Schmiedeeisen, oder aus Beton und Eisen zusammengesetzt sein.

Fig. 252.

Sind z. B. E_b und E_e die beiden Elastizitätsmodul eines Beton-Eisen-Stabes (Fig. 252), der aus 2 rechteckigen Stäben besteht, so erhält man für Elemente des Betonquerschnitts F_b und des Eisenquerschnitts F_e nach (147) die Spannungen

$$(1) \qquad \sigma_b = E_b \frac{\eta}{\varrho}, \qquad \sigma_e = E_e \frac{\eta}{\varrho}, \text{ [1]}$$

demnach, analog zu (148),

$$S = \frac{1}{\varrho}(E_b \int \eta \, dF_b + E_e \int \eta \, dF_e).$$

Für reine Biegung ist $S = 0$, also mit der Abkürzung $\frac{E_e}{E_b} = n$,

$$(2) \qquad \int \eta \, dF_b + n \int \eta \, dF_e = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist das statische Moment der Betonfläche F_b, vermehrt um dasjenige der n-fachen Eisenfläche F_e. Da dasselbe für den Schwerpunkt dieser abgeleiteten Fläche $F_b + nF_e$, er heisse **Verbundschwerpunkt**, Null wird, so ist eine durch diesen gehende Achse die neutrale Achse NN des Verbundquerschnitts.

Für das Spannungsmoment inbezug auf NN erhält man

$$M = \int \sigma \eta \, dF = \frac{E_b}{\varrho}(\int \eta^2 dF_b + n \int \eta^2 dF_e)$$

oder, mit den Bezeichnungen $\int \eta^2 \, dF_b = J_b$, $\int \eta^2 \, dF_e = J_e$,

$$(3) \qquad M = \frac{E_b}{\varrho}(J_b + n J_e).$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (1) folgt, wenn für die

---

1) Bei starker Belastung ist bei Beton die Abweichung von dem hier angenommenen Hookeschen Gesetz ziemlich bedeutend. Daher wäre richtiger Gleichung (116) oder (117) zu benützen, was jedoch ziemlich umständlich ist und im Interesse der Vereinfachung hier unterbleiben mag.

am stärksten gespannte Betonfaser $\eta = b$, für die am stärksten gespannte Eisenfaser $\eta = e$ ist, für die entsprechenden Spannungen σ_b und σ_e

$$(4) \qquad \sigma_b = \frac{M}{J_b + n\,J_e}\,b, \qquad \sigma_e = \frac{M\,n}{J_b + n\,J_e}\,e,$$

und die kleinsten positiven, d. h. die grössten negativen Werte für σ_b und σ_e erhält man, wenn man für b und e die äussersten negativen Werte von η einführt.

Nach Vorstehendem unterscheidet sich die Berechnung der Randspannungen für irgend einen der beiden verbundenen Stoffe nur dadurch, dass bei der Berechnung des Schwerpunktes und des Trägheitsmoments die Fläche des andern Stoffes mit ihrem n, d. h. mit einem Faktor multipliziert wird, welcher das Verhältnis ihres Elastizitätsmoduls zu dem des ersten Stoffes angibt.

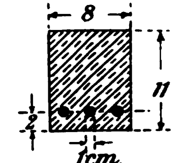


Fig. 253.

Zahlenbeispiel: Welche Spannungen σ_b und σ_e entstehen in dem Querschnitt Fig. 253 durch ein Biegungsmoment $M = 1500$ kgcm, wenn die unteren Fasern Zug, die oberen Druck erhalten, für $n = 8$.[1])

204. Fig. 254 stelle die Kranzverschraubung eines Riemenschwungrades dar, welche infolge der Zentrifugalkraft nur auf Biegung beansprucht wird.

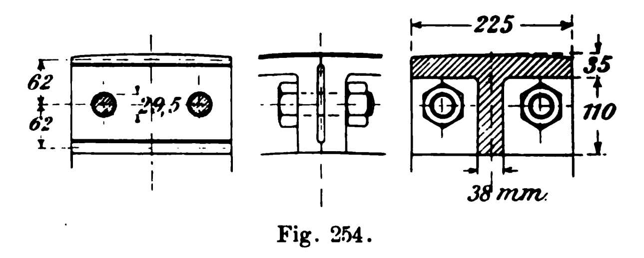


Fig. 254.

Welche Spannung, bezogen auf 1 qcm des Kernquerschnitts entsteht in den Schrauben, wenn für ein biegendes Moment, welches die äussersten Fasern des Kranzes auf $\sigma = 300$ kg/qcm beansprucht, der Druck zwischen den äusseren Arbeitsleisten in der Fuge verschwindet, und wenn angenommen wird, dass der Druck auf die inneren Arbeitsleisten in deren Mittellinie angreift?

1) M. Koenen, Zentralblatt der Bauverwaltung 1902. Wayss und Freitag, Der Betoneisenbau, seine Anwendung und Theorie 1902.

Um wieviel senkt sich der Angriffspunkt der Last bei einem Kran von der Form Fig. 255, unter dem Einfluss der Last, und wie gross ist die in dem Kran hierbei aufgenommene elastische Energie?

Man berechne ein Zahlenbeispiel nach selbst gewählter Aufgabe.

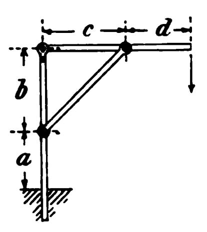


Fig. 255.

5. Die in Fig. 256 dargestellte Säule besitze einen ringförmigen Querschnitt von überall gleichem Durchmesser $2a$ und der Wanddicke d. Sie soll durch die senkrecht wirkende Kraft K belastet werden, welche zwar in der Achse wirken soll, für welche jedoch eine gewisse Exzentrizität e möglich ist und daher auch für die Rechnung im Interesse der Sicherheit angenommen werden mag. Man erhält für die grösste Druckspannung in irgend einem Querschnitt der Säule unabhängig von l nach § 56

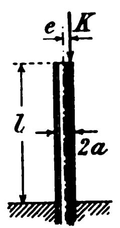


Fig. 256.

$$-\sigma = \frac{K}{F}\left[1 + \left(\frac{e}{i}\right)\left(\frac{a}{i}\right)\right],$$

unter i den Trägheitshalbmesser des Querschnitts verstanden (s. Aufg. 6).

Zahlenbeispiel: $K = 30000$ kg, $\frac{d}{a} = 0{,}2$, $\left(\frac{e}{i}\right) = 0{,}5$ (geschätzt), $l = 6$ m. $\sigma = -250$ kg/qcm. Wie gross ist a und d?

Wie gross ist für die berechnete Säule die Eulersche Knickkraft nach Aufg. 113 für zentrale Belastung?

Anmerkung: Bei den früher viel benutzten „Knickformeln" von Navier, Schwarz, Rankine (s. Foeppl, Festigkeitslehre § 61) wurde e dem Ausdruck $\frac{l^2}{a}$ proportional gesetzt, was höchstens für sehr schlanke, ungenau ausgeführte Stäbe einige Berechtigung hat.

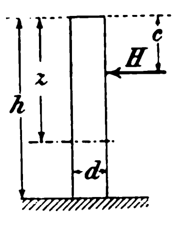


Fig. 257.

7. Ein gemauerter Pfeiler (Fig. 257) von quadratischem Querschnitt werde im Abstand c von oben durch die Horizontalkraft H belastet. Man ermittle die grösste Zug- und Druckspannung in einem Querschnitt im Abstand z von oben, stelle die Gleichung $y = f(z)$ der Stützlinie, d. i. der Resultante aus H und der Schwere

der über dem Querschnitt befindlichen Mauermasse auf und gebe die Bedingungen an, welche erfüllt sein müssen, damit

1) in dem Mauerwerk nirgends Zugspannung entsteht und
2) die Druckspannung nicht grösser wird als $(-\sigma) = 10$ kg/qcm.

208. Ein Schornstein von 33,5 m Höhe (Fig. 258) hat die äussere Form eines abgestumpften Kegels von 2,70 m unterem, 1,3 m oberem Durchmesser. Die Wanddicke ist für die 3 untersten Stufen von je 4,5 m Höhe und die 5 folgenden Stufen von 4 m Höhe der Reihe nach 62, 52, 47, 42, 37, 30, 25, 20 cm. 1 cbm Mauerwerk (Ziegel) wiegt 1600 kg. Man ermittle für die untersten Querschnitte jeder Stufe die grössten Druck- und Zugspannungen, welche bei einem Winddruck von 85 kg/qm, bezogen auf den Meridianschnitt, hervorgebracht werden, vorausgesetzt, dass das Mauerwerk imstande ist, Zugspannungen zu ertragen, ohne dass sich die Fugen öffnen. Ferner berechne man die grösste Druckspannung unter der Voraussetzung, dass Zugspannungen nicht möglich sind. Die letztere Berechnungsweise wurde durch eine vom preussischen Handelsminister eingesetzte Kommission empfohlen (Zeitschr. des Vereins Deutscher Ingenieure 1900 S. 842). Bei Anwendung sogenannten verlängerten Zementmörtels (2 Raumteile Fettkalk, 6—8 Teile Sand, 1 Teil Zement) soll die grösste Druckspannung den Betrag

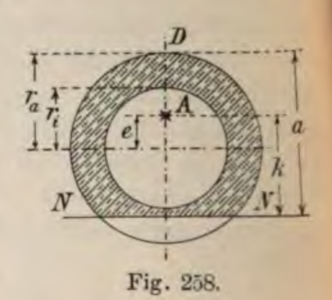


Fig. 258.

$$-\sigma = 5 + 0,15\,h \text{ kg/qcm}$$

nicht überschreiten, unter h den Abstand vom Querschnitt bis zum oberen Ende in Metern verstanden.

Anleitung: Aus Gewicht und Winddruck konstruiere man graphostatisch die Drucklinie. Dieselbe schneide den als Beispiel in Fig. 258 dargestellten Querschnitt in dem Punkte A. Die in A mit senkrechter Richtung wirkende Schnittkraft S des Querschnitts findet sich als Gewicht der über demselben befindlichen Trommeln. Ihr Moment bezogen auf die neutrale Linie NN ist Sk. Dasselbe muss dem Spannungsmoment gleich sein, während S gleich ist der Summe der Spannkräfte. Ist $-\sigma_a$ die grösste Druckspannung in D, so erhält man

(1) $$S = -\int \sigma \mathrm{d}F = -\frac{\sigma_a}{a}\int \eta \mathrm{d}F = -\frac{\sigma_a}{a}\mathfrak{M},$$

(2) $$Sk = -\int \sigma \eta \mathrm{d}F = -\frac{\sigma_a}{a}\int \eta^2 \mathrm{d}F = -\frac{\sigma_a}{a}J.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division

(3) $$k = \frac{J}{\mathfrak{M}},$$

in welcher Gleichung J und $\mathfrak{M}$ transzendente Funktionen von k sind. Um k zu finden, berechne man $\frac{J}{\mathfrak{M}}$, eine Länge, die u heisse, für einige Werte von k und zeichne die Kurve u/k. Der Punkt, für welchen $u = k$ wird, ergibt den gesuchten Wert von k. Mit demselben kann man σ_a sowohl aus (1) wie aus (2) berechnen.

Jenachdem Zugspannungen möglich sind oder nicht, ist der nicht schraffierte Teil des Querschnitts bei der Berechnung von $\mathfrak{M}$ und J zu berücksichtigen oder wegzulassen.

9. Ein gusseisernes Kunstkreuz (Fig. 259) hat beim Heben in der gezeichneten Stellung eine Kraft $K_1 = 20000$ kg, beim Senken eine Kraft $K_2 = 10000$ kg zu übertragen. Die Doppel-Spannstange A aus Flacheisen ist so zu bemessen und beim Montieren mit einer solchen Anfangsspannung zu versehen, dass sie beim Heben eine Zugspannung von 800 kg/qcm, beim Senken eine solche von 300 kg/qcm erfährt. Die Gusseisenarme sind mit 200 kg/qcm möglichst gleich stark in allen Querschnitten zu beanspruchen. Die Wahl der Querschnittsform ist freigestellt. Zur Erzielung der Anfangsspannung sollen die Spannstangenteile so gebohrt werden, dass bei ihnen die Entfernung der Bolzenlöcher um den Betrag λ kürzer ist als bei den Armen. Wie gross ist λ? Wie gross ist die Kraft, mit welcher die Armköpfe aneinander gezogen werden müssen (z. B. durch einen Flaschenzug), um die Teile zusammensetzen zu können?

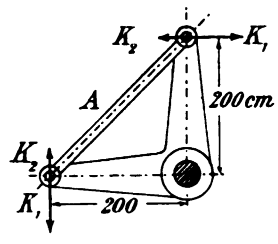


Fig. 259.

10. Der in Fig. 260 dargestellte Rahmen wird durch gleiche Momente M_x welche mit entgegengesetzter Drehrichtung auf die Teile A und B wirken.

belastet. Wenn von der Elastizität von A und B abgesehen wird, so findet nur eine Biegung und Torsion der runden Rahmenteile C und D statt, und zwar stehen die entsprechenden Deformationen in einem solchen Zusammenhang, dass die Endflächen in ihrer Ebene verbleiben müssen. Nach dieser Bedingung kann die statisch unbestimmte Aufgabe gelöst und die Anstrengung berechnet werden. Die Bezeichnung durch Buchstaben oder Zahlen bleibt freigestellt.

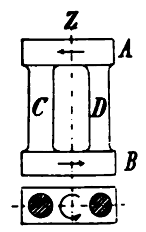


Fig. 260.

211. Der Rahmen Fig. 261 sei in den 4 Ecken festgeschraubt und in der Mitte durch eine zu seiner Ebene normale Kraft K belastet. Die Rahmenseite sei von Mitte bis Mitte Schraube $2a$. Während a und b sowie $d = \frac{b}{2}$ gegeben sind, soll c so bestimmt werden, dass in den auf Biegung beanspruchten Mittelstäben die gleiche Anstrengung (Zerrung) stattfindet wie in den auch auf Torsion beanspruchten Umfangsstäben. (Nach einer Prüfungsaufgabe von Grashof).

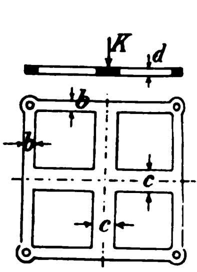


Fig. 261.

212. Die in Fig. 262 dargestellte gekröpfte Welle ist unter der Annahme zu berechnen, dass die Lager mit Kugelschalen ausgestattet sind, dass die Welle, die Kurbeln und die Zapfen überall gleichen Kreisquerschnitt haben, und dass die Welle hinreichend dünn ist, um als Stab behandelt werden zu dürfen. Das Moment der Kraft K_2 wird bei C durch eine elastische Kupplung weiter geleitet, welche keine Einzelkraft auf die Welle überträgt.

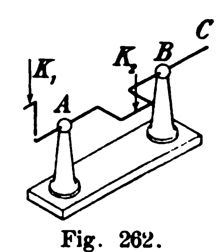


Fig. 262.

213. Ein kreisförmig gebogener, jedoch nicht geschlossener Draht werde mit seinem Ende A fixiert und in dem andern Ende E durch die zur Kreisebene normale Kraft K belastet. Wie gross ist die Federung AE (in Fig. 263 perspektivisch dargestellt), wenn der mittlere Kreishalbmesser r und die Drahtdicke d ist, vorausgesetzt, dass AE verglichen mit r klein ist?

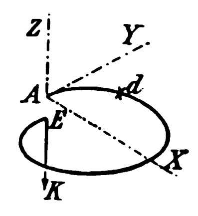


Fig. 263.

us Flacheisen von $a = 7$ cm Höhe und $b = 2$ cm Dicke bestehende ng Fig. 264, dessen mittlerer Halbmesser 5 cm ist, werde durch die senkrechte K belastet. Wie gross darf K sein, lie übliche Anstrengung nicht überschritten ι soll?

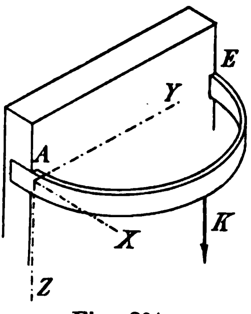


Fig. 264.

nleitung: Man denke sich den Ring bei chnitten und führe daselbst die unbe- n Schnittkräfte K_x, K_y, K_z und die un- ıten Schnittmomente M_x, M_y, M_z ein, aus den fünf Gleichungen $\Delta x = 0$, 0, $\Delta z = 0$, $\beta_x = 0$, $\beta_y = 0$, zu denen ls sechste $K_z = {}^1/_2 K$ hinzukommt, berechnet werden können. Bei ıfstellung der fünf Wirkungsgleichungen sind sowohl die Kräfte und ıte bei E wie die bekannte Kraft K zu berücksichtigen.

Achte Aufgabengruppe.

Wandförmige Körper.

---

215. Ein Wasser-Schieber bestehe, wie Fig. 265 andeutet, aus einem Holzrahmen und einer als Füllung dienenden Blechtafel. Die Füllung hat die Höhe a und die Breite b; die Breite des in den Rahmen eingelassenen Streifens sei dabei vernachlässigt. Man versuche die Dicke der Blechtafel d unter der Voraussetzung zu berechnen, dass der Wasserspiegel mit ihrer Oberkante in gleicher Höhe liegt und dass der Rahmen gegen Biegung vollkommen unnachgiebig ist (s. Grashof Th. d. El. u. F. S. 365).

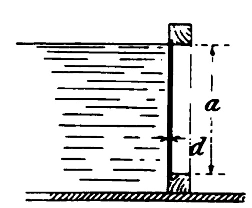


Fig. 265.

Zahlenbeispiel: $a = 1{,}5$ m, $b = 0{,}75$ m. Max$E\varepsilon = 600$ kg/qcm.

216. Für ein Gerinne aus Zement-Beton von dem Querschnitt Fig. 266 sind die Dimensionen a und b zu berechnen. Dabei ist von dem Erddruck auf die Seitenwände abzusehen. Statt dessen werde der hydrostatische Druck des Grundwassers bei der Spiegelhöhe GG für das volle wie für das leere Gerinne in Rechnung gezogen. Die Zugspannung soll nirgends grösser werden als 1 kg/qcm. $\gamma = 2{,}200$ kg/l.

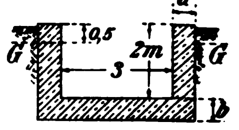


Fig. 266.

Anleitung: Man berechne zunächst a und b nach Festigkeit, hierauf untersuche man, ob das Gewicht des leeren Gerinnes grösser ist als der Auftrieb im Grundwasser. Ist dies nicht der Fall, so sind die Dimensionen a und b entsprechend zu verstärken, wobei zu erstreben ist, dass die Bruchgefahr möglichst klein wird.

I. Die kreisförmige Platte Fig. 267 aus Zement-Beton dient dazu, den Druck einer Säule auf eine hinreichende Grundfläche zu übertragen. Welche Höhe h muss die Platte erhalten, wenn die Säule einen Druck von 15000 kg ausübt und wenn dieser sowohl auf die Platte gleichförmig verteilt wirkt, als auch von derselben gleichförmig verteilt auf den Baugrund übertragen wird. Für die grösste Zugspannung ist eine passende Wahl zu treffen.

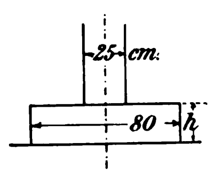


Fig. 267.

8. Das Rohrende Fig. 268 sei durch eine Metallplatte verschlossen, welche, wie angedeutet, so befestigt ist, dass sie sich am Rande nicht in der Richtung des Radius verschieben kann. Die bei einem inneren Überdruck von p Atm. entstehende Spannung und Deformation der Platte ist unter der Voraussetzung zu berechnen, dass dieselbe im spannungslosen Zustand eben ist. (Nach Foeppl, Festigkeitslehre, Aufg. 37.)

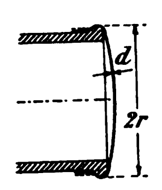


Fig. 268.

9. Die in Fig. 269 dargestellte kreisförmige Scheibe (Tellerventil) werde durch den gleichmässigen Überdruck p kg/qcm belastet. Man ermittle den Spannungs- und Deformationszustand.

Zahlenbeispiel: Es sei $l = 18$ cm, $k = 14$ cm, $p = 15$ kg/qcm. $\mathrm{Max}(E\varepsilon) = 500$ kg/qcm. Wie gross ist d?

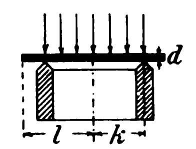


Fig. 269.

10. Für eine Dampfleitung soll ein Kompensationsteller nach Fig. 270 aus Flusseisenblech konstruiert werden. Welche Blechdicke ist für die Wandflächen zu verwenden, damit sie bei genügender Festigkeit doch möglichst nachgiebig werden, und welches ist das grösste elastische Spiel, welches durch einen Kompensator erreicht werden kann. Dabei sei der Dampfdruck 12 Atm., die zulässige Spannung 9 kg/qcm, der Elastizitätsmodul 2 100 000 kg/qcm.

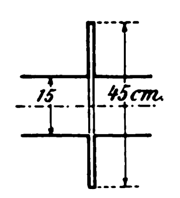


Fig. 270.

In welchen Entfernungen müssen bei einer langen Leitung derartige Apparate angebracht werden, um die vorkommenden Temperaturschwankungen auszugleichen?

221. Der in Fig. 271 dargestellte Ring werde am innern und am äusseren Umfang durch gleichmässig verteilte Zylinderkräfte (s. § 90) $2\pi K_1$ und $2\pi K_2$ von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung belastet. Man ermittle den hierdurch entstehenden Spannungs- und Deformationszustand.

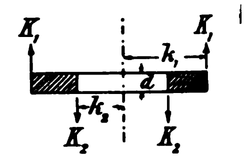


Fig. 271.

222. Die in Aufg. 221 vorausgesetzte Belastung ähnelt derjenigen eines losen Rohrflansches, und zwar umso mehr, je grösser die Anzahl der Verbindungsschrauben ist und je näher dieselben am äusseren Rande sitzen. Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn zwar unendlich viel Verbindungsschrauben, also eine stetige Verteilung ihrer Wirkung, jedoch die übliche, in Fig. 272 angedeutete Verschiedenheit zwischen dem Lochkreisdurchmesser und dem äusseren Flanschdurchmesser angenommen wird? (Westphal, Berechnung der Festigkeit loser und fester Flansche, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1897 S. 1036.)

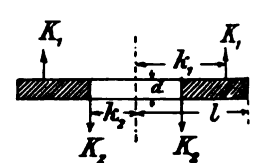


Fig. 272.

223. Eine aus Nickelstahl angefertigte Scheibe von den Abmessungen Fig. 273 rotiert mit einer Umfangsgeschwindigkeit von 100 m/sec um eine senkrechte Achse. Man berechne den Spannungszustand, insbesondere die grösste Hauptspannung, ferner die grösste Zerrung, endlich die Änderungen des inneren und des äusseren Durchmessers infolge der Zentrifugalkraft (s. d. Anm. S. 163).

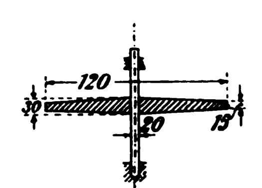


Fig. 273.

224. Ein zylindrisches Blechgefäss (Zentrifuge) (Fig. 274), mit ebenen Böden, von denen der obere in der Mitte durchbohrt ist, rotiert um eine senkrechte Achse. Man berechne die in dem Blechmantel entstehende Spannung a) für das leere, b) für das mit Wasser gefüllte Gefäss und zwar beidemal unter Vernachlässigung des Zusammenhanges zwischen dem Mantel und den Böden.

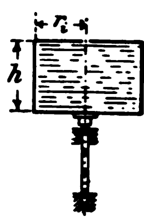


Fig. 274.

Zahlenbeispiel: $r_i = 0{,}45$ m, $h = 0{,}8$ m, $n = 2000$ Touren pro Minute. Welche Dicke erhält die Wand bei der für Dampfkessel üblichen Beanspruchung? (s. § 103).

5. Welche Beanspruchung erfahren die Böden der Zentrifuge der vorigen Aufgabe, und welche Dicke erhalten sie, wenn von der vom Mantel ausgeübten Radialspannung abgesehen wird, für dasselbe Zahlenbeispiel und bei gleicher Beanspruchung wie der Mantel?

Anleitung: Von der in § 90 u. s. w. behandelten Aufgabe unterscheidet sich die vorliegende besonders dadurch, dass p eine Funktion des Radius ist. Hierdurch treten in den Gleichungen (327) und (333) entsprechende Änderungen ein, die jedoch nur mathematischer Natur sind.

6. In einem l m langen Rohr vom lichten Radius r (Fig. 275) und der Wanddicke d in cm bewege sich Wasser mit der Geschwindigeit c m/sec. Wird das Wasser plötzlich durch Verschluss des unteren Rohrendes in der Bewegung gehemmt, so entsteht ein hydraulischer Stoss und hierdurch eine Zunahme der Spannung in der Rohrwand. Man untersuche den Zusammenhang der hier in Betracht kommenden Grössen.

(s. Grashof, Th. d. E. u. F. S. 401.)

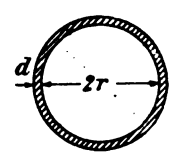


Fig. 275.

7. Man berechne die Spannungen und Deformationen, welche in dem Trichterkolben Fig. 276 bei einem von oben wirkenden Dampfüberdruck von p Atm. entstehen und zwar zunächst unter Vernachlässigung, sodann unter Berücksichtigung des Eigengewichts, und ermittle diejenige Grösse von p, welche einer normalen Anstrengung des Materials (Gusseisen) entspricht. (Vergl. Reymann, Festigkeit und Reibung der Dampfkolben, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1896 S. 85.)

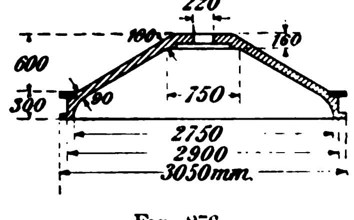


Fig. 276.

8. Der zylindrische Mantel des in Fig. 277 dargestellten Gefässes verursacht insofern bei der Festigkeitsberechnung besondere Schwierigkeiten, als dessen Mittelfläche infolge der punktiert dargestellten Deformation des Meridianschnittes in einen nicht mehr zylindrischen Rotationskörper übergeht (s. Grashof, Th. d. E. u. F. S. 316). Um beurteilen zu können, ob in einem gegebenen Falle die Meridianspannungen oder die Kreisspannungen

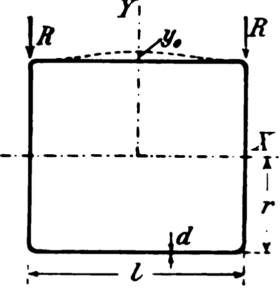


Fig. 277.

ohne zu grossen Fehler vernachlässigt werden können, berechne man 1) die Vergrösserung Δr des Zylinderradius, welche entstehen würde, wenn der Zylinder unendlich lang wäre, sodann 2) die Durchbiegung y_0, welche bei unendlich grossem Radius und der gegebenen Länge stattfinden würde. Sind die Deformationen Δr und y_0 nicht sehr verschieden, so ist eine genauere Rechnung notwendig. Bei welchem Verhältnis $l:r$ wird dieser Fall eintreten, wenn d die Wanddicke ist?

Anleitung: Wäre die für $r = \infty$ berechnete Meridianlinie die richtige auch für den endlichen Wert r, so könnte nach Gleichung (376) der Einfluss der Kreisspannungen durch einen äusseren Druck

$$p_k = \frac{d}{r}\,\sigma_k = E\frac{d}{r}\,\varepsilon_k = E\frac{d}{r^2}\,y$$

ersetzt werden. Die Gesamtbelastung eines zur Achse parallelen Mantelelements von der Breite 1 cm von innen nach aussen ist danach

$$p\,l - \int p_k \mathrm{d}x = 2R,$$

unter R die radial gerichtete Spannkraft eines Bodens pro 1 cm Umfang verstanden.

Berechnet man die elastische Linie des Mantelelements unter Einführung der Kräfte p, p_k und R von neuem, so wird dieselbe von der vorher gefundenen etwas verschieden sein und der wahren Form etwas näher liegen. Entnimmt man sodann dieser Linie die zur Berechnung von p_k dienenden y und wiederholt die Rechnung, so werden die Unterschiede immer kleiner, und man kann sich je nach Bedürfnis dem wahren Wert nach Belieben nähern.

229. Fig. 278 stellt ein Element einer sogenannten Belleville-Feder dar. Dasselbe besteht aus zwei Teilen von der Form abgestumpfter Hohlkegel, die sich in den Grundflächen berühren.

Man berechne die Federungsenergie, welche von einem solchen Hohlkegel bei einer Maximalspannung $\sigma = 3000$ kg/qcm aufgenommen werden kann.

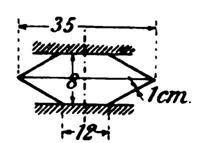


Fig. 278.

230. Der in Fig. 279 dargestellte Hohlkörper, welcher die Form eines Rotationskörpers hat, wird zwischen den ebenen Druckflächen der Körper I und II einem Druck in Richtung der Achse unterworfen. Man unter-

suche den entstehenden Spannungs- und Deformationszustand, insbesondere die grösste Spannung und die grösste Zerrung.

Anmerkung: Diese Aufgabe bildet die Grundlage für die Beurteilung der Elastizität von gewellten Flammrohren für Dampfkessel.

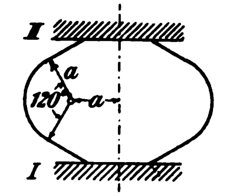


Fig. 279.

Eine kreisförmige, anfangs ebene Blechplatte sei am Rande, wie Fig. 280 andeutet, befestigt und in der Mitte vermittels eines daselbst befestigten Balkens durch ein Kräftepaar belastet. Man untersuche den entstehenden Spannungs- und Deformationszustand. (Problem.)

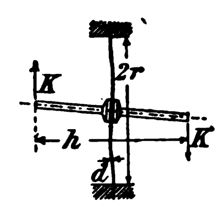


Fig. 280.

Ein gemauerter Turm von 100 m Höhe, Leuchtturm, der einen Apparatenraum trägt, soll als hohler Rotationskörper so gestaltet werden, dass infolge des ruhenden Druckes überall gleiche Meridian- und Kreisspannungen entstehen. Die auf den Baugrund übertragenen Radial-Kräfte können entweder durch diesen selbst oder durch einen starken Eisenring aufgenommen werden.

Die Traglast sei 500 t, die Druckspannung nirgends grösser als $-\sigma = 10$ kg/qcm.

Neunte Aufgabengruppe.

Gedrungene Körper.

233. Man ermittle für einen gekrümmten Stab (s. § 114) von dem rechteckigen Querschnitt (Fig. 281) die Verhältnisse $\frac{r_0}{r_s}$, $\frac{e}{h}$ unter Einführung der Verhältniszahlen

$$\frac{h}{r_s} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},$$

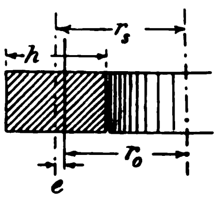


Fig. 281.

bestimme hiernach die Randspannungen innen und aussen für $P = 0$, $M \neq 0$ und vergleiche sie mit den entsprechenden Randspannungen, die sich beim geraden Stab für gleiches Biegungsmoment ergeben.

Für welches Verhältnis $\frac{h}{r_s}$ wird der relative Fehler kleiner als 0,01, den man begeht, wenn man den gekrümmten Stab als geraden behandelt?

234. Man stelle die Hauptdehnungen ε_x, ε_y, ε_z für einen Zylinder mit innerem oder äusserem Mantel-Druck als Funktionen von z durch Kurven mit der Abszisse z und den Ordinaten ε_x, ε_y, ε_z dar (s. § 106 bis § 108).

235. Man stelle die Hauptdehnungen ε_x, ε_z für eine dickwandige Hohlkugel mit innerem Druck p_1 und äusserem Druck $p_2 = 0$ als Funktionen von z durch Kurven mit den Abszissen z und den Ordinaten ε_x, ε_y dar (s. § 110).

236. Ein Rohr (z. B. ein Geschützrohr), (Fig. 282) welches einen sehr grossen inneren Druck p Atm. aushalten muss, soll als Mantelrohr aus zwei Ringen von gleicher Dicke d hergestellt werden, welche, bei verschiedener Temperatur zusammengesetzt, nach dem Temperaturausgleich gegenseitig einen

solchen Druck ausüben, dass unter dem Drucke p die beiden Rohre gleiche maximale Dehnung in Richtung der inneren Kreislinie, also gleiche Anstrengung erfahren. Wenn r der Radius ist, nach welchem die Aussenfläche des innnern Rohres abgedreht ist, wie gross ist der Radius ϱ, nach welchem der äussere Zylinder ausgebohrt werden muss? (s. Grashof, Th. d. E. u. F. S. 313).

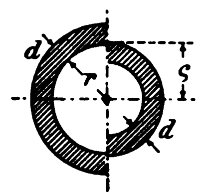


Fig. 282.

7. Für das Segmentstück (Fig. 283) sind die Spannungen in der inneren und äusseren Randlinie des horizontalen Querschnitts AJ zu berechnen, welche durch eine Kraft $K = 1000$ kg hervorgerufen werden und zwar
   a) ohne Rücksicht auf die Krümmung, nach § 56,
   b) mit Rücksicht auf die Krümmung, nach § 116.

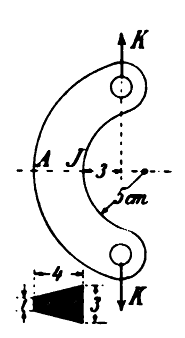


Fig. 283.

Um wieviel grösser ergibt sich die Anstrengung eines nach Fig. 213 belasteten Ringes nach der Berechnungsweise § 114 bis § 117 als nach derjenigen in § 65 für quadratische Stabquerschnitte von der Seite $2a$ und für den Radius r der Zentrallinie, wenn für das Verhältnis $\frac{r}{a}$ der Reihe nach die Werte 2, 4, 6, 8, 10 angenommen werden?

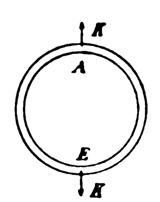


Fig. 213.

Ein Hohlzylinder von relativ grosser Wanddicke (Fig. 284) wird zwischen 2 parallelen Flächen dem Drucke K ausgesetzt. Man untersuche den hierbei entstehenden Spannungs- und Deformationszustand, insbesondere für die Punkte grösster Anstrengung (s. Grashof, Th. d. E. u. F. S. 272).

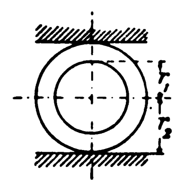


Fig. 284.

In welchen Punkten eines Kettengliedes von der Form (Fig. 285 und Fig. 286) ergeben sich die grössten Spannungen, und wie gross sind dieselben, ver-

glichen mit der Zugspannung $\frac{K}{F}$, welche in einem geraden Stab aus dem Ketteneisen bei der Belastung $\frac{K}{2}$ entstehen würde (s. Grashof, Th. d. E. u. F. S. 273).

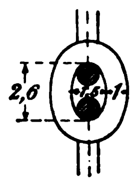


Fig. 285.

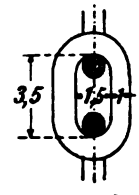


Fig. 286.

241. Für den durch Fig. 287 dargestellten Pleuelstangenkopf ermittle man die Spannungen in den gefährlichsten Querschnitten, welche durch eine achsial gerichtete Kraft $K_x = 5000$ kg hervorgerufen werden.

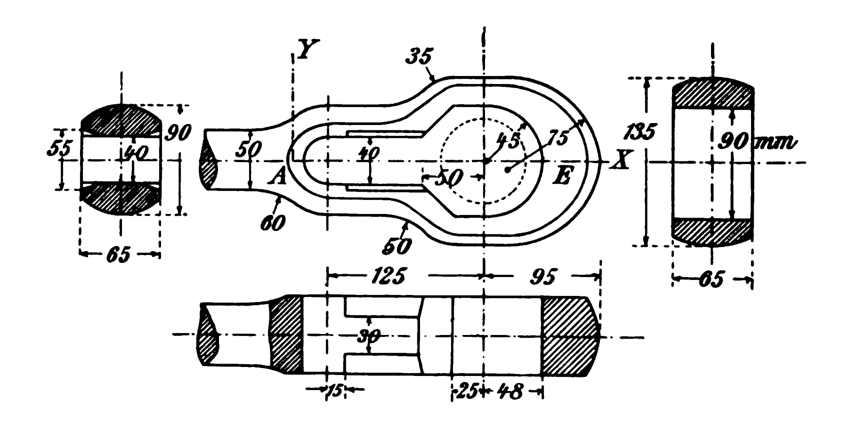


Fig. 287.

Anleitung: Man zeichne zunächst die Zentrallinie für die ganze Länge des Rahmens, zerlege sie in eine hinreichende Anzahl gleicher oder ungleicher Teile (letzteren Falles unter Benutzung solcher Teilpunkte, dass die Formen der Teile möglichst einfach werden) und drücke inbezug auf das Koordinatensystem XY die Werte β_e und Δy_e für E infolge der bekannten Kraft K_x sowie einer unbekannten Schnittkraft S_e und eines unbekannten Schnittmoments M_e aus, zu deren Bestimmung die Gleichungen $\beta_e = 0$, $\Delta y_e = 0$ genügen. Nachdem M_e und S_e gefunden sind, kann man diese mit K_x zu einer Resultante R zusammensetzen, aus deren Lage die Momente in den einzelnen Querschnitten hervorgehen, indem man R mit den Hebelarmen multipliziert. Hiernach zeigt sich, ob die Querschnitte wenigstens angenähert gleiche Anstrengung erfahren, oder ob Änderungen vorzunehmen sind.

. Wie gross ist die biegende Kraft K_y (Folge der zur Achse normalen Beschleunigungskomponente), durch welche der Pleuelkopf ebenso stark angestrengt wird wie durch die Achsialkraft $K_x = 5000$ kg der vorigen Aufgabe.

- Fig. 288 stellt einen Flacheisenstab dar, welcher zwei bis auf die Mitte gehende Einschnitte hat. Der zwischen den Endpunkten dieser Schnitte liegende Teil der Stabmittelebene, dessen Höhe $2a$ ist, und dessen Dicke 1 cm sei, erfährt hierbei eine Beanspruchung, die man bei oberflächlicher Betrachtung geneigt sein würde, als eine Schub- oder Scheerbeanspruchung zu bezeichnen. In Wirklichkeit ist die Beanspruchung eine viel verwickeltere. Man suche dieselbe zu beschreiben und der Rechnung zugänglich zu machen. (Problem.)

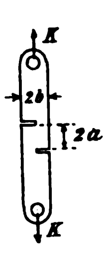


Fig. 288.

. Man versuche den Spannungs- und Deformationszustand für den zylindrisch angenommenen Kopf eines Schraubenbolzens Fig. 289 zu ermitteln.

Anleitung: Die Ebene eines Normalschnittes zur X-Achse geht durch die Belastung in eine krumme Fläche über, die jedenfalls eine Rotationsfläche sein wird, also durch die Gleichung der Meridianlinie dargestellt werden kann. Stellt man diese für ein bestimmtes x als Reihe mit steigenden Potenzen von y dar, so darf dieselbe wegen der Symmetrie keine ungeraden Potenzen von y enthalten. Die Faktoren sind Funktionen von x, sonach erhält man etwa

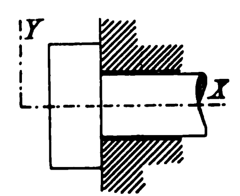


Fig. 289.

$$\xi = F_1(x) + F_2(x)y^2 + F_3(x)y^4 + \ldots\ldots$$

Ferner muss sein nach Gleichung (10)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Weiter ist für jeden zu X normalen Schnitt durch den Kopf $S = 0$, also

$$\int \sigma_x\, y\, dy = 0.$$

Nimmt man an, dass die Unterlage vollkommen starr ist, so wird für alle Punkte der Auflagefläche die Deformation $\xi = 0$.

Die mit X parallelen Geraden einer Meridianebene gehen in Kurven über, von denen man nur weiss, dass sie die Rotationsflächen ξ in der freien Oberfläche rechtwinklig schneiden (s. § 32).

Weiter sind die Gleichungen (377) sowie die Poissonschen Gleichungen (106) zu berücksichtigen.

Der Gang der Rechnung wird analog zu § 106 zu führen sein, doch wird es voraussichtlich nur unter vereinfachenden Annahmen möglich sein, die Aufgabe zu lösen.

Nachdem die Deformationskurven der Senkrechten und Wagerechten gefunden sind, kann auch überall die Hauptspannung nach Grösse und Richtung sowie das Hauptspannungsnetz gezeichnet werden. (Problem.)

245. Man ermittle die Schubspannungen, welche in dem Steg eines Balkens von dem Querschnitt Fig. 132 entstehen, wenn derselbe freitragend durch die Kraft K belastet wird und vergleiche sie mit der grössten Spannung σ_x (s. Grashof, Th. d. E. u. F. S. 128).

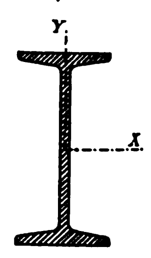


Fig. 132.

246. Der Stab Fig. 290 von rechteckigem Querschnitt, welcher in der Mitte durchbohrt ist, werde durch die Kräfte K, K achsial belastet. Man untersuche den Spannungs- und Deformationszustand, welcher in der Nähe der Bohrung stattfinden wird.

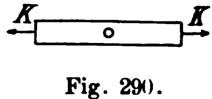


Fig. 290.

Anmerkung: Diese Aufgabe hat Kirsch in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1898 S. 797 behandelt. Er fand, dass innerhalb der Elastizitätsgrenze die grösste Zugspannung in dem mittleren Querschnitt an den Lochgrenzen stattfindet.

247. Erfahrungsgemäss (Versuche von Kirkaldy, Vickers, v. Bach) hat ein Stab von der Form Fig. 291 grössere Zugfestigkeit als ein zylindrischer Stab von der Dicke d.

Diese Erscheinung erklärt sich dadurch, dass hier in der Einschnürung ein dreiachsiger Spannungszustand entsteht und infolgedessen sowohl die Dehnung in Richtung der Achse, nach Gleichung (110), wie auch der Unterschied zwischen den Hauptspannungen kleiner ausfällt als für den geraden Stab (§ 48).

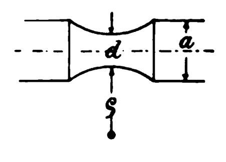


Fig. 291.

Man versuche den Spannungs- und Deformationszustand näher zu erforschen, ev. auf diesem Wege unter Hinzunahme des Experiments die noch offene Frage, wovon die Festigkeitsgefahr bei mehrachsiger Spannung abhängt, der Lösung zuzuführen. (Problem.)

8. Der dreieckige Mauerkörper Fig. 292 aus isotropem Material vom spezifischen Gewicht $\gamma = 2{,}8$ t/cbm, welcher als Sperrmauer für ein Stau-Becken dienen soll, wird, wenn dasselbe leer ist, nur durch sein Eigengewicht belastet. Für diesen Zustand suche man die Form der Netzlinien (s. § 30) zu bestimmen, ohne von der Bernoullischen Hypothese Gebrauch zu machen. Zur Ermittelung des Spannungszustandes werde angenommen, dass die Breite der Mauer unveränderlich ist, dass keine Temperaturänderungen stattfinden und dass in den Seitenflächen nur Normalspannungen herrschen. (Problem.)

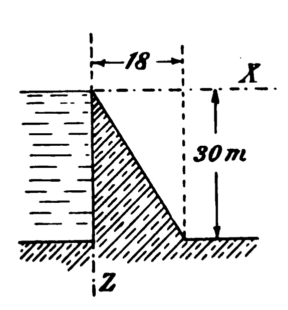


Fig. 292.

9. Wie ändern sich die Netzlinien in dem Mauerkörper Fig. 292, wenn das Stau-Becken vollständig mit Wasser gefüllt wird unter den übrigens gleichbleibenden Bedingungen der vorigen Aufgabe? Welcher Spannungszustand wird sich bei der neuen Belastung einstellen? (Problem.)

Druck von August Pries in Leipzig.

Gedruckt bei August Pries in Leipzig.





